Afdeling Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

Complexe Functietheorie (152025)

Dinsdag 21 augustus 2007 09.00–12.00 uur

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en moeten exact gegeven worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, hoeven de opgaven 3(b) en 4(c) niet te maken om toch de toegekende normeringspunten te krijgen.

1. Los op voor $z \in \mathbb{C}$.

   (a) $z^4 = (1+z)^4$.

   (b) $\operatorname{Re}(e^{iz}) = \cos z$.

2. Beschouw de functie $f:\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

   (a) Teken het beeld onder f van $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

   (b) Voor welke $z \in \mathbb{C}$ is $g(z) = \operatorname{Log}(f(z))$ analytisch?
   Bereken voor die z de afgeleide $g'(z)$.

3. Gegeven is dat f een gehele functie is (dus analytisch op $\mathbb{C}$).
   We schrijven $f(z) = f(x+i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

   (a) Bereken $f(z)$ als uitdrukking in z als gegeven is $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ en $f(0) = -2i$.

   (b) Bepaal alle $f(z)$ waarvoor geldt $\dfrac{\partial v}{\partial x} \geq 0$.
   (Aanwijzing: toon eerst aan dat f' noodzakelijk constant is.)

4. Gegeven zijn de functies $g(z) = ze^{1/z^2}$ en $h(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z^2)}$.

   (a) Bepaal de Laurent reeks van $h(z)$ die convergent is in

      1) $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$,

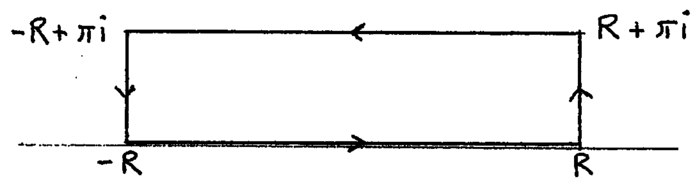
      2) $\{z \mid 1 < |z|\}$.

   (b) Bepaal de aard van de singulariteit $z = 0$ voor $g(z)$.

   (c) Wat is het gedrag (analytisch, pool, essentiëlle singularitiet) van de functie $h(z)$ in $z = \infty$?

5. Bewijs: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4}$.

   Aanwijzing: integreer de functie $\dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$ over een contour van de vorm



6. (a) Wat is het beeld van de schijf $\{z \mid |z-2| \leq 2\}$ onder de Möbius-transformatie $w = \dfrac{z}{2z-8}$.

   (b) Bepaal een Möbius-transformatie die het gebied $\{z \mid |z-2| \leq 2\}$ afbeeldt op $\{z \mid |z| \geq 1\}$.

7. Gegeven is $a > 0$. Leid af dat de Fourier-getransformeerde van de functie $F(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$ wordt gegeven door $G(\omega) = \dfrac{1}{2a} e^{-a\omega}$ voor $\omega > 0$.

NORMERING

1	(a)	2	2	(a)	2	3	(a)	3	4	(a)	4	5	6	6	(a)	2	7	4
	(b)	2		(b)	3		(b)	2		(b)	2				(b)	2		
										(c)	2							

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.