UNIVERSITEIT TWENTE.

Complexe Functietheorie (191520252)
Donderdag 25 juni 2015, 8.45 - 11.45 uur

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- De punten bij opgave 7 zijn automatisch verdiend als op de huiswerkopgaven van dit jaar voldoende is gescoord.

1. De eenheidsbol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ wordt Riemann-bol genoemd als we het vlak $x_3 = 0$ identificeren met het complexe vlak (x_1-as is reële as, x_2-as is imaginaire as). Door stereografische projectie vanuit $N(0,0,1)$ wordt ieder complex getal z afgebeeld op een bolpunt (x_1, x_2, x_3).

   a) Toon aan dat geldt:
   $$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

   b) Beschrijf de projectie van de schijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/2\}$.

2. a) Voor welke $k \in \mathbb{R}$ is $u(x,y) = (e^y + e^{ky})\cos(x)$ harmonisch op $\mathbb{R}^2$?

   b) Bepaal de analytische functie $f(z)$ als uitdrukking in $z = x + iy \in \mathbb{C}$ waarvoor
   $$\mathrm{Re}\,(f(z)) = (e^y + e^{-y})\cos(x)$$
   en bovendien $f(0) = \cancel{4}\ 2 + i$

3. Bereken
   $$\int_{|z|=3} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz$$
   met behulp van de residue stelling van Cauchy.
   [De cirkel $z = |3|$ is positief geörienteerd.]

4. a) Formuleer de stelling van Liouville.

   b) Veronderstel dat f een gehele functie (entire) is met $\mathrm{Im}\, f(z) \geq 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Bewijs dat f een constante functie is.

Z.O.Z.

5. Bereken

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x+1} dx.$$

[p.v. = hoofdwaarde (principle value)]

6. Vind een transformatie $z \mapsto w(z)$ die het gebied $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2\}$ in het z-vlak afbeeldt op $D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ in het w-vlak.

   [Hint: doe de transformatie in twee stappen.]

7. Gegeven is een reële functie $F(t)$ voor $t > 0$ die differentieerbaar is en waarvoor

   1. $\int_0^{\infty} |F(t)| dt$ bestaat,
   2. $|F(t)| \leq e^t$.

   a) Geef de formule voor de Fourier-getransformeerde van $F(t)$.

   b) Geef de formule voor de Laplace-getransformeerde van $F(t)$ alsmede de inversieformule.

   c) Geef een verband tussen de Fourier- en de Laplace-getransformeerde van $F(t)$.

Normering

1	a: 2	2	a: 2	3	: 6	4	a: 1	5	: 6	6	: 5	7	a: 1
	b: 3		b: 4				b: 3						b: 2
													c: 1

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten