Tentamen Complexe Functietheorie (152025)

- Datum : maandag 1 november 2004, 09:00-12:00 uur.
- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, hoeven de opgaven 6 en 7 niet te maken om toch de toegekende normeringspunten te krijgen.

1. Gegeven is de functie $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + x$.
   (a) Ga na dat $u(x,y)$ harmonisch is op $\mathbb{R}^2$.
   (b) Bepaal de analytische functie $f(z)$ op $\mathbb{C}$ waarvoor $\operatorname{Re} f = u$ en $f(0) = i$. Schrijf het antwoord $f(z)$ in termen van z.
2. Gegeven is de functie
$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}.$$
   Bepaal van deze functie de Laurentreeks, welke convergent is in de gebieden:
   (a) $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$.
   (b) $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z|\}$.
3. Zij a een positief reëel getal. We definiëren de functie f door
$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2}.$$
   (a) Bepaal de polen en hun ordes van de functie f.
   (b) Noem γ_R de halve cirkelboog in het bovenhalfvlak van R naar $-R$. Bewijs dat
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$
   (c) Bereken
$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(1+x^2)^2} dx.$$

4. Gegeven is de Möbiustransformatie

$$w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

(a) Bereken en teken het beeld van de imaginaire as.

(b) Schrijf f als samenstelling van functies $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, waarbij f_1 en f_3 lineaire transformaties zijn ($z \mapsto \alpha z + \beta$) en f_2 de inversie-afbeelding is ($z \mapsto z^{-1}$).

(c) Beargumenteer dat het beeld onder $f(z)$ van een lijn door $z = 0$, m.u.v. de reële as, altijd een cirkel is.

(d) Voor welke $z \in \mathbb{C}$ is $\operatorname{Log} f(z)$ differentieerbaar? Bereken $\frac{d}{dz} \operatorname{Log} f(z)$ voor deze waarden van z.

5. Gegeven is de functie $F(t) = e^{-t^2}$.

(a) Laat zien dat de Fourier-getransformeerde van $F(t)$ gegeven wordt door

$$\frac{e^{-\frac{1}{4}\omega^2}}{2\pi} \int_{\frac{i\omega}{2}-\infty}^{\frac{i\omega}{2}+\infty} e^{-z^2} dz.$$

(b) Bereken de integraal uit (a) met behulp van contourintegratie en $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

6. (a) Formuleer de Hoofdstelling van de Algebra en de stelling van Liouville.

(b) Bewijs de Hoofdstelling van de Algebra.

7. Gegeven is het polynoom $p(z) = z^5 + z^4 + z + 10$.

(a) Bewijs dat alle nulpunten van $p(z)$ in de cirkelschijf $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 2\}$ liggen.

(b) Bereken

$$\oint_{|z|=2} \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

Normering:

1(a) : 2	2(a) : 2	3(a) : 1	4(a) : 2	5(a) : 2	6(a) : 2	7(a) : 2
1(b) : 3	2(b) : 2	3(b) : 2	4(b) : 1	5(b) : 3	6(b) : 2	7(b) : 2
		3(c) : 4	4(c) : 2			
			4(d) : 2			

Totaal : $36 + 4 = 40$ punten.