Afdeling Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : TW2007/AAMP/31/gj&avdm
Versie : 18 juni 2007

Universiteit Twente

Vak : **Complexe Functietheorie**
Vakcode : 152025

Datum : donderdag 21 juni 2007
Tijdstip : 09:00 – 12:00 uur
Plaats :

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, krijgen de punten van opgave 7 cadeau.

1. De functie $f(z)$ is analytisch op $\mathbb{C}$. Stel $u = \mathrm{Re}(f)$ en $v = \mathrm{Im}(f)$, en $z = x+iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Formuleer de Cauchy-Riemann-relaties voor u en v en druk $f'(z)$ uit in partiële afgeleiden van u en/of v.
   (b) Bereken $f(z)$ als uitdrukking in z als gegeven is:
   $$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad \text{en} \qquad f(0) = -2i\,.$$

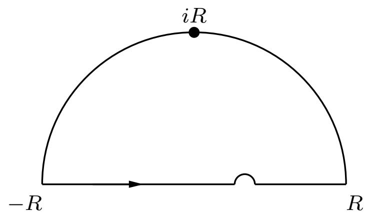
2. Beschouw de functie $f(z) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$.
   (a) Voor welke waarden van $z \in \mathbb{C}$ is $f(z)$ niet gedefinieerd?
   (b) Voor welke waarden van $z \in \mathbb{C}$ is $f(z)$ niet differentieerbaar?
   (c) Bepaal het beeld onder f van $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = -1 \text{ en } \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

3. Bepaal de Laurent-reeks van de functie $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$ in elk van de volgende gebieden
   (a) $1 < |z| < 2$;
   (b) $2 < |z|$.

Z.O.Z

4. Bereken (de hoofdwaarde)

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx\,.$$



Aanwijzing: Integreer $\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)}$ over een contour van de hiernaast aangegeven vorm.

5. (a) Schrijf de Möbiustransformatie $f(z) = \dfrac{z+i}{iz+1}$ als een eindige compositie van translaties, vermenigvuldigingen, rotaties en/of inversies.

   (b) Bepaal een Möbiustransformatie die het gebied $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ afbeeldt op het gebied $\{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) < 0\}$.

6. Ga na dat de Fouriergetransformeerde van $F(t) = e^{-|t|}$ wordt gegeven door

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right).$$

7. *(= bonus voor huiswerk)*

   (a) Formuleer de stelling van Rouché;

   (b) Bewijs dat alle oplossingen van $z^4 + z^3 + 1 = 0$ in het ringgebied $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \dfrac{3}{4} < |z| < \dfrac{3}{2}\right\}$ liggen.

Normering:

1a : 2	2a : 2	3a : 3	4 : 6	5a : 2	6 : 4	7a : 1
b : 3	b : 2	b : 3		b : 3		b : 3
	c : 2					

Totaal: 36 + 4 = 40 punten