Afdeling Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : TW2008/AAMP/31/gj&avdm
Versie : 13 juni 2008

Universiteit Twente

Vak : **Complexe Functietheorie**
Vakcode : 152025

Datum : donderdag 19 juni 2008
Tijdstip : 09:00 – 12:00 uur
Plaats : Sportcentrum

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, krijgen de punten van opgaven 5a, 5b en 7a cadeau.

1. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ met $f(z) = z + \frac{1}{z}$.
   (a) Teken het beeld onder f van $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. 2
   (b) Voor welke $z \in \mathbb{C}$ is $g(z) = \ln(f(z))$ analytisch en bereken in dat geval $g'(z)$. 2
   3

2. Gegeven is dat f analytisch is op het gehele compleze vlak.
   We schrijven $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.
   (a) Bereken $f(z)$ als uitdrukking in z als gegeven is: 3

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad \text{en} \qquad f(0) = -2i\,.$$

   (b) Bepaal alle $f(z)$ waarvoor geldt $\dfrac{\partial v}{\partial x} \geq 0$. 3
   (*Aanwijzing:* bepaal eerst $f'(z)$)
   4

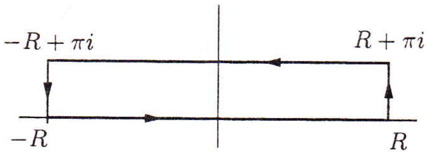
3. Bepaal de Laurent-reeks van de functie $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$ in elk van de volgende gebieden
   (a) $|z| < 1$; 3
   (b) $2 < |z|$. 3
   5

Z.O.Z

4. Bewijs

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4}$$

Aanwijzing: Integreer $\dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$ over een contour van de hiernaast aangegeven vorm.



$\frac{6}{2}$

5. (a) Bewijs dat de 'cross-ratio' van vier complexe getallen invariant is onder de inversie-afbeelding; 1

   (b) Bewijs dat de 'cross-ratio' van vier complexe getallen invariant is onder een Möbius-transformatie; 1

   (c) Geef de Möbiustransformatie die het binnengebied van de eenheidscirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ afbeeldt op het bovenhalfvlak $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ $\frac{3}{4}$

6. Bereken de Fouriergetransformeerde van $F(t) = e^{-|t|}$ $\frac{4}{2}$

7. (a) Formuleer het Principe van het Argument; 2

   (b) Bereken $\displaystyle\int_{C_3} \frac{4z^3}{z^4 + 16}\, dz$ waarbij $C_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$. $\frac{2}{}$

~~8~~ 2 ½.

1 gratis.

6.6

Normering:

1a : 2	2a : 3	3a : 3	4 : 6	5a : 1	6 : 4	7a : 2
b : 3	b : 3	b : 3		b : 1		b : 2
				c : 3		

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

Complex Function Theory
(152025)

Thursday, 2009, June 25, 9-12am

- To every answer, a motivation is required.
- You may use a (graphic) calculator.
- For those who have gained the homework bonus, they do not need to solve exercise 6, and still get these four points (see the score table below).

1. (a) Find all $z \in \mathbb{C}$ for which $\sin(z) = \cos(z)$. 3

   (b) For which $z \in \mathbb{C}$ is $Log\left(i^z\right) = z\, Log(i)$? 3 1

2. The complex function $f(z)$ is analytic for all $z \in \mathbb{C}$.
   Denote $z = x + iy$, $\mathrm{Re}(f) = u$ and $\mathrm{Im}(f) = v$.

   (a) Formulate the Cauchy-Riemann relations between u and v and express $f'(z)$ in terms of partial derivatives of u and v. 2

   (b) For $f(z)$ it is known that $\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy - 6x$ and $f(0) = 3 - 2i$ and $f'(0) = 1$. Find the function $f(z)$. 4
   (Hint: determine first the function $f'(z)$). 3

3. Compute

$$\int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z-3)}dz$$ 5 3

   along the contour $\Gamma : |z| = 4$.

4. Find the Laurent series for the function

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

   in each of the following domains:

   (a) $|z| < 1$ 2

   (b) $2 < |z|$. 2 4

5. Verify:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{3x}} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(Hint: use the residue theorem for a rectangle based on the real axis with height $\frac{2\pi}{3}$). 6

6. (a) Formulate Rouche's Theorem for analytical functions.

(b) Prove, using Rouche's Theorem, that every polynomial of degree n has n zeros. 3

7. Verify that the Fourier transform of

$$F(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

is for $a > 0$ given by 6

$$G(\omega) = \frac{e^{-a|\omega|}}{2a} \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

Grading points:

1.(a) 3 (b) 3	2. (a) 2 (b) 3	3. 5	4. (a) 2 (b) 2	5. 6	6. (a) 1 (b) 3	7. 6

Total: 36+4 = 40 points