

Complexe Functietheorie (152025)

Donderdag 24 Juni 2010, 08:45 - 11:45 uur

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en moeten exact zijn.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, hoeven de opgave 7 niet te maken.

1. Los op voor $z \in \mathbb{C}$:

(a) $\cos(z) = i \sin(z)$.

(b) $(z+1)^4 = z^4$.

2. Gegeven is de harmonische functie $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$

(a) Bepaal alle harmonisch toegevoegde (geconjugeerde) functies van $u(x, y)$ op \mathbb{R}^2 .

(b) Bepaal de analytische functie $f(z)$ als uitdrukking in z waarvoor $\operatorname{Re}(f(z)) = u$ en $f(0) = i$.

3. Bereken

$$\int_C \frac{z+i}{z^2+z} dz$$

in de gevallen

(a) C : cirkel $|z| = \frac{1}{2}$, eenmaal doorlopen in positieve richting.

(b) C : vierkant $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 1$, eenmaal doorlopen in positieve richting.

4. Gegeven is de functie

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

- (a) Bepaal alle singulariteiten van $f(z)$ in \mathbb{C} , alsmede hun aard.
- (b) Classificeer het gedrag van $f(z)$ in $z = \infty$.
- (c) Geef de Laurentreeks van $f(z)$ voor $|z| > 0$.

5. Bereken met behulp van Residue theorie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} dx$$

- 6. (a) De Möbius transformatie $w = f(z)$ beeldt de punten $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ en $z_3 = \infty$ af op de punten $w_1 = -i$, $w_2 = 1$ en $w_3 = i$, respectievelijk. Bepaal w als functie van z .
 - (b) Is er een Möbius transformatie $w = g(z)$ die de reële z -as afbeeldt op de eenheidscirkel $|w| = 1$ en waarvoor geldt $g(i) = 2$ en $g(-i) = -\frac{1}{2}$? Motiveer uw antwoord.
7. (a) Formuleer de stelling van Rouché en de Hoofdstelling van de Algebra.
- (b) Bewijs de Hoofdstelling van de Algebra met behulp van de stelling van Rouché.

Normering

| | | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|------|-------------------|-------------------|
| 1. (a) 2 (b) 3 | 2. (a) 2 (b) 2 | 3. (a) 3 (b) 3 | 4. (a) 2 (b) 2 (c) 3 | 5. 6 | 6. (a) 2 (b) 2 | 7. (a) 2 (b) 2 |
|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|------|-------------------|-------------------|

Totaal: 36+4 = 40 punten