UNIVERSITEIT TWENTE.

Invullen in blokletters/To be completed by student

Cursusnaam/*Coursename* CFTh		Datum/*Date* 27-06-2013	Bladnr./*Page no.*
Cursuscode/*Coursecode*			
Studentnr./*Student no.*	Voorl./*Initials*	Opleiding/*Programme*	Groepnr./*Group no.*
Naam/*Name* Correctiemodel			

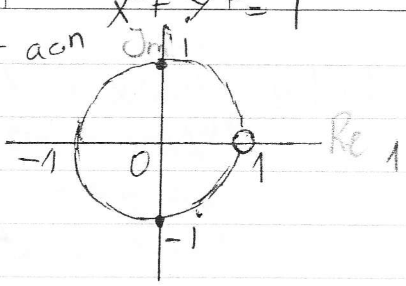
5. (a) $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

$z = it \longmapsto \frac{t^2-1}{t^2+1} + i\,\frac{2t}{t^2+1}$ 1 voldoet aan $x^2+y^2=1$

(f Möbius, lijn $\to$ lijn of cirkel

$f(0) = -1$, $f(i) = i$, $f(-i) = -i$ cirkel)

antwoord: eenheidscirkel $\setminus \{1\}$ 1



(b) splitsing $f(z) = 1 - \frac{2}{z+1}$ levert bijvoorbeeld

$f_1(z) = 1 - z$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$ en $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ 1

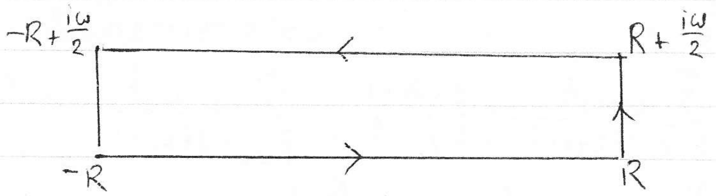
of $f_3 = z+1$ en $f_1 = -2z+1$

(c) lijn $\cup\{\infty\}$ $\to$ lijn $\cup\{\infty\}$ of cirkel 1. Als het beeld ∞ bevat, dan is het origineel $z = -1$ geweest, maar dat kan niet. Dus is het een (gepuncteerde) cirkel 1

6. $G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t}\,dt$ ½ $\overset{\text{form.}}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}\omega^2} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-(t+\frac{i\omega}{2})^2}\,dt$ ½ kwijts

$= \text{substitutie } (z = t + \frac{i\omega}{2}) \int_{z=\frac{i\omega}{2}-\infty}^{\frac{i\omega}{2}+\infty} e^{-z^2}\,dz \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4}\omega^2}}{2\pi}$ ½

We tonen aan dat $\int_{z=-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = \int_{z=\frac{i\omega}{2}-\infty}^{\frac{i\omega}{2}+\infty} e^{-z^2}\,dz$ dus $= \sqrt{\pi}$



$\oint e^{-z^2}dz = 0$ ½

$\int e^{-z^2}dz \to 0$ en $\int_{\rightarrow} = -\int_{\leftarrow}$ 1

inverse $F(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\omega^2} e^{i\omega t}}{2\sqrt{\pi}}\,d\omega$ ½ Antwoord: $\frac{e^{-\frac{1}{4}t^2}}{2\sqrt{\pi}}$ ½

7. (a) Hoofdstelling: polynoom $\neq$ const heeft minstens één complex nulpunt

Liouville: $f(z)$ geheel en begrensd $\Rightarrow f(z)$ constant 1

(b) Stel $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ heeft geen nulpunten ½

dan $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ ½ geheel en begrensd 1 $\Rightarrow$ tegenspraak

1. (a) $\sin(z) = \cos(z) \iff \frac{1}{2i}(e - e) = \frac{1}{2}(e + e) \iff$
$e^{2iz} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ½ $\iff 2iz = \frac{\pi}{2}i + k2\pi i$ ½ $\iff z = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ½

(b) $\mathrm{Log}(i^z) = z\,\mathrm{Log}(i) \iff \mathrm{Log}(e^{z\,\mathrm{Log}(i)}) = z\,\mathrm{Log}(i)$ ½ $\iff$
$-\pi < \mathrm{Im}(z\,\mathrm{Log}(i)) \leq \pi$ ½ $\iff -2 < x \leq 2$ ½
Antwoord: $\{(z = x+iy) \mid -2 < x \leq 2\}$ ½

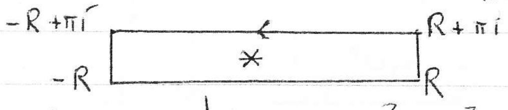
2. (a) $\partial u/\partial x = 4x^3 - 12xy^2 = \partial v/\partial y$ ½ $\Rightarrow v = 4x^3y - 4xy^3 + c(x)$ ½
$\partial u/\partial y = -12x^2y + 4y^3 = -\partial v/\partial x$ ½ $\Rightarrow c'(x) = 0$ en dus
$v = 4x^3y - 4xy^3 + c$ ½ met $c \in \mathbb{R}$
$f(x,0) = x^4 + ic \Rightarrow f(z) = z^4 + ic$ 1 $\Rightarrow f(z) = z^4 - 2i$ ½

(b) $f'(z)$ is analytisch op $\mathbb{C}$; $f' = u_x + i v_x$ ½
$\mathrm{Im}(f'(z)) \geq 0$ overal $\Rightarrow g(z) = f'(z) + i$ heeft abs. waarde ≥ 1 1
$\Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ is analytisch en heeft abs waarde $\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ is constant 1½
$\Rightarrow f'(z) = \text{constant } c_1 \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = c_1(z) + c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ½
$c_1 = \alpha + i\beta \quad c_2 = \gamma + i\delta \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \beta \geq 0$ ½

3. (a) $z=0$ is singulariteit, de enige want 1
$z=0$ is essentiële singulariteit want $\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{z}) = \cdots - \frac{2}{3}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}$ 1

(b) $g(w) = f(\frac{1}{w}) = \sin(w)\cos(w)$ gedrag van g in $w=0$ 1
$w=0$ is nulpunt van $g(w)$ van orde 1, zo ook $z=\infty$ van $f(z)$ 1

(c) of via product $\sin(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} \pm \cdots$ ½ met $\cos(\frac{1}{z}) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} \cdots$ ½
geeft $\frac{1}{z} + \frac{-2/3}{z^3} + \frac{2/15}{z^5} \mp \cdots\cdots$ (drie termen) 2
of $\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{z}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2k+1}$ 1 $= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1}$ 1

4. keuze rechthoek


(sterretje in de rechthoek)
singulariteiten van $f(z) = \frac{1}{e^z + e^{-z}}$: $e^z + e^{-z} = 0 \iff z = \frac{1}{2}\pi i + k\pi i$
$z = \frac{1}{2}\pi$ is pool van orde 1 want $\frac{1}{f(z)}$ heeft nulpunt van orde 1 1
$\mathrm{Res}(f(z); z = \frac{1}{2}\pi i) = \lim_{z \to \frac{1}{2}\pi i} \frac{z - \frac{1}{2}\pi i}{e^z + e^{-z}} = (\text{l'Hop}) \ \frac{1}{2i}$ 1
Res. stelling: $\oint f(z)\,dz = \pi$ ½
$\int_{\gamma_1} \to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ ½ $\int_{\gamma_2} \to 0$ ½ $\int_{\gamma_3} \to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ ½ $\int_{\gamma_4} \to 0$ ½
Conclusie: antwoord $\pi/4$ ½ (want helft van de helft ∞ van π)