

UNIVERSITEIT TWENTE.

Complexe Functietheorie

Vakcode: 191520252

Donderdag 27 juni 2013, 08:45 - 11:45 uur

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, krijgen de punten van opgave 7 cadeau.

1. (a) Los op voor $z \in \mathbb{C} : \sin(z) = \cos(z)$
(b) Voor welke $z \in \mathbb{C}$ is $\text{Log}(i^z) = z\text{Log}(i)$?

2. Gegeven is dat f analytisch is op het gehele complexe vlak.
We schrijven $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

- (a) Bereken $f(z)$ als uitdrukking in z als gegeven is:

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \text{ en } f(0) = -2i$$

- (b) Bepaal alle $f(z)$ waarvoor geldt $\frac{\partial v}{\partial x} \geq 0$.
(Aanwijzing: bepaal eerst $f'(z)$)

3. Gegeven is de functie

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

- (a) Bepaal alle singulariteiten van $f(z)$ in \mathbb{C} , alsmede hun aard.
- (b) Classificeer het gedrag van $f(z)$ in $z = \infty$.
- (c) Geef de Laurentreeks van $f(z)$ voor $|z| > 0$.

4. Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

(Aanwijzing: Pas de Residuenstelling toe op een rechthoek met hoogte π)

5. Gegeven is de Möbiustransformatie

$$w = f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

- (a) Bereken en teken het beeld van de imaginaire as.
- (b) Schrijf f als samenstelling van functies $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, waarbij f_1 en f_3 lineaire transformaties zijn ($z \mapsto \alpha z + \beta$) en f_2 de inversie-afbeelding is ($z \mapsto z^{-1}$).
- (c) Beargumenteer dat het beeld onder $f(z)$ van een lijn door $z = 0$, m.u.v. de reële as, altijd een cirkel is.

6. Bepaal de Fourier getransformeerde $G(\omega)$ van de functie $F(t) = e^{-t^2}$. Druk $F(t)$ ook uit in de $G(\omega)$ door de inverse-Fourier-formule. (gebruik $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

7. (a) Formuleer de Hoofdstelling van de Algebra en de stelling van Liouville.
(b) Bewijs de Hoofdstelling van de Algebra met behulp van de stelling van Liouville.

Normering:

- | | | | | | | | | | |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|---|----|-------|
| 1. | (a) 2 | 2. | (a) 3 | 3. | (a) 2 | 4. | 6 | 5. | (a) 2 |
| | (b) 2 | | (b) 3 | | (b) 2 | | | | (b) 1 |
| | | | | | (c) 3 | | | | (c) 2 |
| 6. | 4 | 7. | (a) 2 | | | | | | |
| | | | (b) 2 | | | | | | |

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten