UNIVERSITEIT TWENTE.

Complexe Functietheorie

Donderdag 26 juni 2014, 8:45 - 11:45 uur
Vakcode: 191520252

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan krijgen de punten van opgave 7 cadeau.

1. Los op voor $z \in \mathbb{C}$:

   (a) $\sinh(z) \in \mathbb{R}$.

   (b) $(z+1)^4 = z^4$.

2. Gegeven is dat f analytisch is op het gehele complexe vlak. We schrijven $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

   (a) Formuleer de Cauchy-Riemann relaties tussen u en v en bewijs hiermee dat v een harmonische functie is.

   (b) Van $f(z)$ is gegeven dat $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 12xy - 6x$, dat $f(0) = 3 - 2i$ en dat $f'(0) = 1$. Bepaal $f(z)$ als uitdrukking in z.

3. Veronderstel dat f een gehele functie is met $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ voor alle z. Bewijs dat f een constante functie is.

4. Geef de Laurentreeks van $\dfrac{1}{z(z-4)}$ voor het ringvormige gebied $1 < |z-1| < 3$.

5. Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Z.O.Z.

6. (a) Beschrijf het beeld van de lijn $\{z = x + ix \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ onder de afbeelding $z \mapsto \frac{1}{z}$.

   (b) Vind een afbeelding $w = w(z)$ die het gebied $\left\{z \;\middle|\; 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{6}\right\}$ afbeeldt op de schijf $\{w \mid |w| < 1\}$.

7. (a) Formuleer het principe van het argument (Argument Principle).

   (b) Controleer het principe voor $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}$ en de cirkel $|z| = 3$.

Normering

1 a: 2 b: 3	2 a: 2 b: 3	3 : 4	4 : 6	5 : 6	6 a: 2 b: 4	7 a: 2 b: 2

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.