



(INVULLEN IN BLOKLETTERS)

☐ 1) TENTAMEN	vak	datum	bladnr.
☐ EXAMEN	vaknr.	studienchtng	groepnr.
naam	voorn.		
studentnr.	geb.datum		

DETAIL NORMERING + UITWERKING TENTAMEN (richtlijn)
GRAFEN THEORIE 6-4-2005

Naam de gegeven graaf G .

1. Beschouw een willekeurige geïnduceerde deelgraaf H met $\Delta(H) \geq 2$. De maximale graad van de gegeven graaf is 3, dus H heeft een punt u met graad $3 = d_G(u)$.

Ieder punt is deel van een driehoek in G , dus er zijn buizen v & w van u in H zodat u, v & w een driehoek vormen in G .

H is een geïnduceerde deelgraaf, dus deze drie punten zijn ook deel van een driehoek in H . Bipartiete grafen bevatten geen oneven cyclen, dus H is niet bipartiet.

Hieruit volgt de bewering.

① ieder punt in Δ , max. graad 3

① def. geïnd. deelgraaf

① bipartiet $\Rightarrow$ geen oneven cyclen

- 2a Inductie over $N(G)$. Voor $|V(G)|=1$ ($G=K_1$) } ①/2 basis is de bewering duidelijke waar.

Stel nu: voor iedere graaf G op n punten geldt } ①/2 i.v.
 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Laat G^* een willekeurige graaf op $n+1$ punten zijn. Verwijder een willekeurig punt v :
 $G' = G - v$.

$\Delta(G') \leq \Delta(G)$, G' heeft n punten.

$\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ (i.v.).

Beschouw een $(\Delta(G)+1)$ -kleuring van G' .

Langzaam $d_G(v) \leq \Delta(G)$, is er minstens één van de kleuren in $\{1, 2, \dots, \Delta(G)+1\}$ niet gebruikt voor buizen van v . Kleur v met deze kleur.

1) Aankruisen wat van toepassing is Dit is $(\Delta(G)+1)$ -kleuring van G .

Pr. rns volat me met inductie.

max. graad observatie,

① toepassen i.v.

constructie
① G -kleuring vanuit G' -kleuring

2b ~~alle~~ alle volledige grafen, en
alle oneven cyclen (geen verdere
uitleg nodig, lemma).

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3a Beschouw een punt $v \in V(G)$ met
 $d(v) = \delta(G)$.

Als $d(v) < |V(G)| - 1$, dan is er een punt
 u dat niet ~~is~~ ^{is} samen met v . Dus in
 $G - N(v)$ zijn u en v niet verbonden,
en $N(v)$ is een puntsgede met $d(v) = \delta(G)$
punten: $\kappa(G) \leq \delta(G)$ } ① constructie
puntsgede

Als $d(v) = |V(G)| - 1$, dan heeft ieder punt
(want v had minimale graad) alle andere
punten als buur, dus G is volledig,
en per definitie van $\kappa(G)$:
 $\kappa(G) = |V(G)| - 1 = \delta(G)$ } ① volledige grafen

3b $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot 39 = 2|E(G)|$, dus

de gemiddelde graad is $\frac{2 \cdot 39}{26} = 3 = \bar{d}(G)$ } ① gem. graad

~~ook~~ $\kappa(G) \geq 2$ (niet persé $\kappa(G) = 2!$),
dus $\delta(G) \geq 2$ (Whitney). } ① ondergrens $\delta(G)$

$\delta(G) \leq \kappa(G)$, en
als $\delta(G) = \bar{d}(G) = 3$, dan zijn alle graden
gelijk, dus $\delta(G) = \Delta(G)$, tegenspraak. } ① bovengrens $\delta(G)$

Conclusie: $\delta(G) = 2$



(INVULLEN IN BLOKLETTERS)

☐ I) TENTAMEN

☐ EXAMEN

vak

datum

bladnr.

vaknr.

studierichting

groepnr.

naam

voorn.

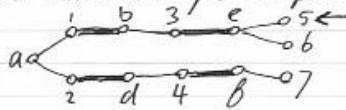
studentnr.

geb.datum

4. Label de punten:



Zoek vanuit a vergruend pad:



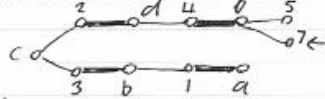
①

Vergruud de matching met het pad van a naar 5:



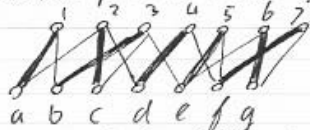
①

Zoek nu vanuit c:



①

Gebruik het pad van c naar 7:

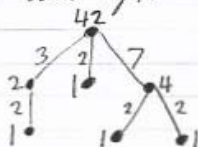


①

Dit is een perfecte matching, dus we zijn klaar.

1) Aankruisen wat van toepassing is

- 5a Bij ieder punt hoort een gewortelde subboom.
Bij ieder punt staat het getal dat bij deze boom hoort, en bij iedere lijn staat $p(\phi)$, waarbij ϕ dit getal is van het 'child' punt van deze lijn:



i	$p(i)$
1	2
2	3
3	5
4	7

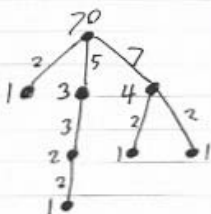
①: berekening ϕ , gegeven factoren, of 1 per def. van kinderen

①: berekening $p(\phi)$

42 is dus het antwoord.

5b $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

2^e laag puntlabels vinden we uit tabel.
lijn labels: ontbinden in factoren etc...



①: puntlabels: p^{-1}

①: lijnlabels: ontbinden in factoren.

- 6 Graaf (a) is 3-kleurbaar (makkelijke tekening), maar niet 2-kleurbaar, want er zijn driehoeken.
Dus $\chi(G_a) = 3$.
Graaf (b) is 2-kleurbaar (tekening), maar niet 1-kleurbaar (er zijn lijnen), dus $\chi(G_b) = 2$.

① chromatische getallen vinden

Polynoom 1, 2 & 4 zijn 0 voor waarde $x=2$, dus polynoom 3 moet bij G_b horen. En dus niet bij G_a .

① $(x-2)$ factoren

Polynoom 2 is 0 voor $x=3$ ($(x-3)$ factor), dus hoort niet bij G_a .

① $(x-3)$ factor

Polynoom 1 heeft als laagste exponent 2, dus hoort bij graaf met 2 componenten.

① laagste exponent

Conclusie: polynoom 4 hoort bij G_a .



(INVULLEN IN BLOKLETTERS)

☐ 1) TENTAMEN	vak	datum	bladnr.
☐ EXAMEN	vaknr.	studienchting	groepnr.
naam	voorn.		
studentnr.	geb.datum		

7 Een k -reguliere graaf op n punten heeft $\frac{k \cdot n}{2}$ lijnen. } ① aantal lijnen

Volgens Vizing is er een $(k+1)$ -lijkeleuning, laat matchings $M_1, \dots, M_{k+1}$ deze lijkeleuning induceren. } ① Vizing

$$|M_1| + |M_2| + \dots + |M_{k+1}| = \frac{k \cdot n}{2},$$

dus deze matchings bevatten gemiddeld

$$\frac{k \cdot n}{2(k+1)} \text{ lijnen.}$$

Dus ~~er is~~ één van deze matchings heeft minstens $\frac{k \cdot n}{2(k+1)}$ lijnen.

① gemiddeld aantal lijnen, gemiddelde $\leq$ max