

Kenmerk : TW2008/DWMP/63/ha

Vak : **Grafentheorie**

Vakcode : 152075

Datum : 9 april 2008

Tijdstip : 13.30-16.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.

In dit tentamen wordt met een graaf G steeds een gewone graaf bedoeld (*simple graph*), d.w.z. G heeft geen lussen (*loops*) en twee verschillende punten worden hoogstens door één lijn verbonden.

1. (a) [2 pt] G is een graaf met $\delta(G) \geq 2$. Toon aan dat G een cykel bevat.
(b) [3 pt] G is een graaf met $\delta(G) \geq 3$. Toon aan dat G een even cykel bevat.
(Hint: beschouw een langste pad in G)
2. [4 pt] Toon aan dat een graaf G een bos is dan en slechts dan als elke samenhangende deelgraaf van G een geïnduceerde deelgraaf (*induced subgraph*) is.
3. [5 pt] Toon aan dat een graaf G 2-samenhangend is dan en slechts dan als voor elk drietal verschillende punten x, y, z in $V(G)$ er een (x, z) -pad in G bestaat waar y op ligt.
4. G is een graaf die een cykel bevat.
(a) [3 pt] Toon aan dat als G taille (*girth*) ≥ 6 heeft, dan is G^c Hamiltoniaans.
(Hint: Toon aan dat als $uv \notin E(G^c)$, dan $d_{G^c}(u) + d_{G^c}(v) \geq \nu$ en beschouw de afsluiting (*closure*) $c(G^c)$)
(b) [2 pt] Toon aan dat (a) ook geldt als G taille 5 heeft.
5. (a) [2 pt] Formuleer de Stelling van Tutte, die nodig en voldoende voorwaarden geeft voor het bestaan van een perfecte matching in een graaf G .
(b) [2 pt] Teken een 3-reguliere graaf die geen perfecte matching heeft en geef aan waarom; of toon aan dat zo'n graaf niet bestaat.
6. (a) [2 pt] G is een graaf met $\nu = 2n + 1$ en $\varepsilon > n\Delta$. Toon aan dat $\chi' = \Delta + 1$.
(b) [2 pt] G is een graaf die verkregen is door in een k -reguliere graaf met een oneven aantal punten minder dan $\frac{k}{2}$ lijnen te verwijderen. Toon aan dat $\chi' = \Delta + 1$.

Z.O.Z

7. G is een k -kritieke graaf, $v \in V(G)$ en $uv \in E(G)$.
- (a) [3 pt] Toon aan dat er een (echte) k -kleuring $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ van G bestaat zo dat:
 $f(v) = k$; $f(u) \in \{1, \dots, k-1\}$ als $u \neq v$ en $f(N(\{v\})) = \{1, \dots, k-1\}$.
- (b) [2 pt] Toon aan dat elke (echte) $(k-1)$ -kleuring van $G - uv$ dezelfde kleuren geeft aan u en v .
8. [4 pt] $[S, \overline{S}]$ en $[T, \overline{T}]$ zijn minimale sneden in netwerk N .
 Toon aan dat dan ook $[S \cup T, \overline{S \cup T}]$ een minimale snede is in N .

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten