Vak	:	**Fundamentele Analyse voor TW**
Vakcode	:	**152130**
Datum	:	2 juli 2004
Tijd	:	9.00 - 12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Geef de definitie van een Cauchy-rij (Cauchy-sequence) in $\mathbb{R}$.

   (b) Beschouw een willekeurige collectie $S = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ van natuurlijke getallen. Definieer de rij getallen $\{a_n\}$ recursief volgens

   $$a_1 = 1 \text{ en } a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{s_n}}{3^n}.$$

   Laat zien dat voor alle n en $k \in \mathbb{N}$

   $$|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{3^{n+k-1}}$$

   (c) Bewijs dat de rij $\{a_n\}$ een Cauchy-rij vormt.

2. (a) Geef de definitie van een limietpunt (limit point) van een rij $\{a_n \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Zij de rij $\{a_n \in \mathbb{R}\}$ gegeven door

   $$a_{2n} = \frac{n+1}{n+2},\ n \geq 1,\ \text{ en } a_{2n+1} = 2 + \frac{(-1)^n}{e^n},\ n \geq 0.$$

   Laat zien dat de getallen 1 en 2 limietpunten zijn van deze rij.

   (c) Laat zien dat de overige reële getallen geen limietpunten zijn.

3. (a) Geef de definities van de lim sup (limit superior) en de lim inf (limit inferior) van een rij $A = \{a_n \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Laat zien dat de volgende schattingen gelden:

   $$\limsup_{n \mapsto \infty} a_n \leq \sup(A) \text{ en } \liminf_{n \mapsto \infty} a_n \geq \inf(A).$$

   (c) Gelden i.h.a. de gelijktekens in onderdeel (b)? Zo ja, bewijs dit en zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Z.O.Z.

4. Voor alle $j \in \mathbb{N}$, beschouw de functies

$$f_j(x) = \frac{x^j}{j 2^{j-1}}.$$

(a) Bewijs dat de convergentiestraal R van de machtreeks $\sum f_j(x)$ gelijk is aan 2.

(b) Noteer

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), \text{ voor } -R < x < R.$$

Bepaal een $b > 0$ zodat $\sum f_j(x)$ uniform convergeert op $[-b, b]$ naar een functie $f(x)$.

(c) Laat zien dat f op $(-R, R)$ differentieerbaar is en bepaal de MacLaurin reeks van f'.

(d) Bepaal een uitdrukking voor $f(x)$

1	a	:	1	2	a	:	1	3	a	:	2	4	a	:	2	
	b	:	2		b	:	2		b	:	2		b	:	1	
	c	:	2		c	:	2		c	:	2		c	:	2	
													d	:	3	

totaal = 24 + 4 = 28 punten