

Vak : FA 1/Analyse 1 voor TW
Vakcode : 152135
Datum : 29 juni 2007
Tijd : 13.30 - 16.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Geef de definitie van een Cauchy-rij (Cauchy-sequence) in \mathbb{R} .
(b) Definieer de rij getallen $\{a_n\}$ recursief volgens

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ en } a_{n+1} = 4 + \frac{1}{5}a_n.$$

Bewijs met inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 5$.

- (c) Bewijs dat de rij $\{a_n\}$ een Cauchy-rij vormt en bepaal de limiet van de rij.
2. (a) Laat zien dat een convergente rij precies één limietpunt heeft.
(b) Zij de rij $\{a_n \in \mathbb{R}\}$ gegeven door

$$a_{2n} = \frac{n+2}{2n+1}, \quad n \geq 1, \text{ en } a_{2n+1} = n, \quad n \geq 0.$$

Bepaal de limietpunten van deze rij.

- (c) Is elke rij met precies één limietpunt convergent? Zo ja, bewijs dit en zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
3. (a) Beschouw een rij $A = \{a_n \in \mathbb{R}\}$. Stel dat de rij A begrensd is, d.w.z. $|a_n| \leq M$ voor een $M \in \mathbb{R}$. Geef de definities van $\limsup(A)$ (limit superior) en $\liminf(A)$ (limit inferior) en laat zien dat ze eindig zijn.
- § (b) Laat zien dat elk limietpunt α van de rij A voldoet aan $\liminf(A) \leq \alpha \leq \limsup(A)$.
- (c) Bewijs dat $\limsup(A)$ het grootste limietpunt van de rij A is en $\liminf(A)$ het kleinste.

Z.O.Z.

4. Voor alle $j \geq 0$, beschouw de machtreeks $\sum_{j \geq 0} a_j x^j$ waarbij de $\{a_j\}$ gegeven worden door

$$a_{2j+1} = 3(j+1)9^j, j \geq 0, \text{ en } a_{2j} = 1, j \geq 0.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks $\sum a_j x^j$.

(b) Formuleer de Weierstrass M -test.

(c) Beschouw de functies

$$f_j(x) = a_j 4^{-jx}.$$

Geef een $b \geq 0$ zodat $\sum f_j$ uniform convergeert op $[b, \infty)$.

(d) Noteer

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x), \text{ voor } x \in [b, \infty).$$

Bepaal een uitdrukking voor $f(x)$

1	a : 1	2	a : 1	3	a : 2	4	a : 2	
	b : 2		b : 2		b : 2		b : 1	
	c : 2		c : 2		c : 2		c : 2	
							d : 3	

totaal = 24 + 4 = 28 punten