

Vak : Analyse 1
Vakcode : 152135
Datum : 4 April 2008
Tijd : 9:00 - 12:00 uur

**Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

1. (a) Geef voor een rij getallen $A = \{a_n\}$ de definitie van $\liminf(A)$.
(b) Laat $A = \{a_n\}$ en $B = \{b_n\}$ rijen zijn waarvoor $a_n \leq b_n$ voor elke n , en waarvoor $a = \liminf(A)$ eindig is, en waarvoor de rij B convergent is met limiet b . Toon aan dat $a \leq b$.
(c) Laat de rij $A = \{a_n\}$ gegeven worden door

$$a_{2n} = \sqrt[n]{n} \cdot \exp\left(1 + \frac{1}{n+1}\right),$$
$$a_{2n+1} = 1 + (-1)^n \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}.$$

Bepaal de limietpunten van A .

2. (a) Onderzoek het bestaan van de volgende oneigenlijke integraal:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{3/2}} dx$$

- (b) Laat f een continue functie zijn op het interval $[a, b]$. Toon aan dat f naar boven begrensd is en dat er een getal $c \in [a, b]$ bestaat zodat

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(c).$$

- (c) In dezelfde situatie als in onderdeel (b) hierboven, veronderstel bovendien dat f continu differentieerbaar is op $[a, b]$. Toon aan dat in het punt c geldt dat

$$f'(c) \cdot (x - c) \leq 0 \text{ voor alle } x \in [a, b].$$

3. (a) Bewijs dat de functie \sqrt{x} uniform continu is op $[\frac{1}{2}, \infty)$.
(b) Toon aan dat de functie x^2 niet uniform continu is op $[1, \infty)$.
(c) Geef voor $f \in C^1(\mathbb{R})$ een eenvoudige voorwaarde voor de afgeleide van de functie f zodat f uniform continu is op de hele reële as \mathbb{R} . Geef een expliciet voorbeeld van een functie met die eigenschap.

Z.O.Z

4. Beschouw de machtreeks $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ waarin

$$a_j = \frac{2^j}{j^2} \text{ voor alle } j.$$

- (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.
(b) Noteer $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$. Geef een interval waarop de machtreeks uniform convergeert en bepaal een uitdrukking voor $f(x)$ op dat interval.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | 1 | 2 | a | 2 | 3 | a | 2 | 4 | a | 2 |
| | b | 2 | | b | 3 | | b | 2 | | b | 3 |
| | c | 2 | | c | 2 | | c | 3 | | | |

Totaal = 24+4=28 punten