Tentamen Analyse I voor TW (152135)
06-04-2011

Het gebruik van electronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

1. a. Geef de definitie van *uniforme continuïteit.*

   b. Bewijs of weerleg: de functie f gedefinieerd op het interval $(0,1)$ door

$$f(x) = x \ln \frac{1}{x}$$

   is uniform continu.

2. Van een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ is gegeven dat

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \quad (n \geq 1).$$

   We veronderstellen dat $a_1 = 5$.

   a. Toon aan dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $a_n > 3$.

   b. Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ monotoon dalend is.

   c. Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert en bepaal de limiet van de rij.

3. Zij I een open interval rond 0. Zij $f : I \to \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar, met $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ en $f''(0) \neq 0$. Bovendien is f'' continu in 0.

   a. Bewijs dat voor iedere $x \in I$ er een $c = c(x)$ tussen x en 0 is, waarvoor

$$f(x) = \frac{f''(c)}{2}x^2.$$

   en laat zien dat $\lim_{x\to 0} c(x) = 0$.

   b. Bewijs dat er een interval J rond 0 is, zodat voor $x \in J \setminus \{0\}$ geldt $f(x) \neq 0$.

   c. Bewijs dat voor iedere $x \in I$ er een $d = d(x)$ bestaat tussen x en 0, waarvoor

$$f'(x) = f''(d)x.$$

   hint: je kunt hier de "mean value theorem" voor gebruiken.

   d. Bewijs dat

$$\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 2$$

4. Beschouw de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, met a_n en b_n reële getallen.

   a. Wanneer is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent?

   b. Laat zien dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ zo dat $\forall k, l \geq N$ geldt $\mid \sum_{n=k}^{l} a_n \mid < \epsilon$.

   c. Laat zien dat wanneer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ een absoluut convergente reeks is en de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ begrensd is, de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ absoluut convergeert.

   d. Is de uitspraak in (c) nog steeds waar als we tweemaal 'absoluut convergent' vervangen door 'convergent'?

5. Ga na of de volgende integralen convergeren of divergeren

   a. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}+\cos x}$;

   b. $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}+\tan x}$.

normering

1a.	1	2a.	3	3a.	4	4a.	1	5a.	3
b.	3	b.	2	b.	2	b.	2	b.	3
		c.	2	c.	2	c.	3		
				d.	2	d.	3		

totaal 36