Tentamen Analyse I voor TW (2012-201100102)
08-04-2013

Het gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

1. Laten X en Y verzamelingen zijn en zij $f: X \to Y$.

   a. Laat zien dat $f^{-1}(f(E)) \supseteq E$ voor alle deelverzamelingen E van X.

   b. Laat zien dat f eenduidig is $(1-1)$, als $f^{-1}(f(E)) = E$ voor alle deelverzamelingen E van X.

2. Stel dat $0 \leq x_1 < 1$ en $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ voor $n \in \mathbb{N}$.

   a. Laat zien: x_n nadert monotoon dalend naar 0 als $n \to \infty$.

   b. Laat zien dat $\frac{x_n}{x_{n+1}} \to 2$ als $n \to \infty$.

3. Laat f een tweemaal differentieerbare functie zijn op $(0, \infty)$. Neem aan dat de suprema van $|f(x)|$, $|f'(x)|$ en $|f''(x)|$ op $(0, \infty)$ bestaan en noem ze M_0, M_1 en M_2 respectievelijk.

   a. Gebruik de stelling van Taylor om aan te tonen dat voor iedere $x > 0$ en voor iedere $h > 0$ is er een ξ is zodat

   $$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x + 2h) - f(x)) - hf''(\xi).$$

   b. Toon aan dat hieruit volgt dat $M_1 \leq hM_2 + \dfrac{M_0}{h}$ voor iedere $h > 0$.

   c. Bewijs dat $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

4. Laat $f: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = \frac{1}{n} \text{ met } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   a. Geef de definitie van een *partitie* van het interval $[0, 1]$.

   b. Toon aan dat voor iedere partitie P van $[0, 1]$ geldt: $L(f, P) = 0$.

   c. Toon aan dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een partitie P bestaat zo dat $U(f, P) < \varepsilon$.

   d. Toon aan dat f Riemann-integreerbaar is op $[0, 1]$ en bepaal zijn integraal.

z.o.z.

5. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

a. Bepaal de puntsgewijze limiet van de reeks op het interval $[0,1]$.

b. Geef de definitie van uniforme convergentie van een reeks van functies.

c. Is de reeks uniform convergent op het interval $[0,1]$?

d. Is de reeks convergent op het interval $[\delta, 1]$ met $0 < \delta < 1$?

normering

1a.	3	2a.	3	3a.	2	4a.	2	5a.	2
b.	3	b.	3	b.	3	b.	2	b.	2
				c.	2	c.	3	c.	2
						d.	2	d.	2

totaal 36