Herkansing Toets.
Lineaire Structuren 1. 2014-201300056-1A: Structuren en Modellen
donderdag 6 november 2014; 13:45 - 16:45 uur

Dit tentamen bestaat uit 10 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

1. [5pt] Gegeven is een verzameling $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. De optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn gedefineerd als volgt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (2a_1 + 2b_1, a_2 + b_2), \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2), \; c \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat V geen vectorruimte is door aan te tonen dat aan één van de volgende eigenschappen niet voldaan is:

(VS 7) Voor alle $u, v \in V$, $c \in F$ geldt $c(u + v) = cu + cv$.

(VS 8) Voor alle $v \in V$, $c, d \in F$ geldt $(c + d)v = cv + dv$.

2. [5pt] Geef de definitie van lineaire onafhankelijkheid.

3. [10pt] Bepaal of de verzameling $\{(1, 2, 3, 1), (1, 3, 4, 2), (1, -1, 1, 2), (3, 2, 1, 3)\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^4$.

4. [5pt] $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding. Bewijs dat de nulruimte $N(T)$ een deelruimte is van V.
2

5. [5pt] Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ is een isomorfisme. Bewijs dat $\dim(V) = \dim(W)$.

6. $P_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ is gegeven door

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & -a \end{pmatrix}.$$

(a) [5pt] Welke bewering van i)-iv) is waar: i) T is injectief (*one-to-one*), ii) T is surjectief (*onto*), iii) T is injectief en surjectief, iv) T is noch injectief and noch surjectief?

(b) [5pt] Bepaal $[T]_\beta^\gamma$ waarbij β de standaard basis is voor $P_2(\mathbb{R})$ en γ de standaard basis is voor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) [5pt] Laat zien dat $[T(x^2 + 2x + 1)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x^2 + 2x + 1]_\beta$.

7. [10pt] $Ax = b$ is een lineair syteem, K is de oplossingsverzameling en K_H is een oplossingverzameling voor het homogene systeem $Ax = \mathbf{0}$. Bewijs dat

$$K = \{s\} + K_H,$$

waarbij s is een particuliere oplossing van $Ax = b$. (Hier $S+U = \{s+u : s \in S, u \in U\}$).

8. Noteer met $\underline{a}_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, kolom j van een 4×5 matrix A. Gegeven is:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De kanonieke rijvorm (*reduced row echelon form*) van de aangevulde matrix $(A\ b)$ van het system $Ax = b$ is als volgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) [5pt] Schrijf de oplossing van dit systeem in een parametrische vector-vorm.

(b) [10pt] Bereken de andere twee kolommen van matrix A en de vector b.

9. A is een 7×3 en B is 3×7 matrix.

(a) [5pt] Bepaal de afmetingen van AB. Laat zien dat elke rij van AB een lineaire combinatie is van de rijen van B.

2 (b) [5pt] Wat kunt u zeggen over rang (AB)? Motiveer uw antwoord.

10. [10pt] Gegeven is de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van matrix A.

Totaal: 90 punten

NB: cijfer=([aantal punten]+10)/10.