LS1 Toets 1 Chapter 1

25-09-2015

1. Neem $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [1pt]

$(a_1, \dots, a_n) \in V \Rightarrow c(a_1, \dots, a_n) \notin V$ [1pt]

$\Rightarrow$ V is géén vectorruimte over $\mathbb{R}$ [1pt]

2. a) (a) $M = 0$ $\quad O_{ij} = 0, \; i,j = 1, 2, \dots n$

$$\sum_{j=1}^{n} O_{ij} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n \qquad [0.5pt]$$

$$\Rightarrow O = \underline{0} \in W. \qquad [0.5pt]$$

(b) $M^{(1)}, M^{(2)} \in W$

$$\sum_{j=1}^{n} (M^{(1)} + M^{(2)})_{ij} = \sum_{j=1}^{n} M^{(1)}_{ij} + \sum_{j=1}^{n} M^{(2)}_{ij} \qquad [1.5pt]$$

$$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow \underbrace{M^{(1)} + M^{(2)} \in W}_{[0.5pt]}$$

(c) $M^{(1)} \in W, \; c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{n} (cM^{(1)})_{ij} = \sum_{j=1}^{n} cM^{(1)}_{ij} = c \sum_{j=1}^{n} M^{(1)}_{ij} = c \cdot 0 = 0$$

[1.5pt]

$$\Rightarrow \cancel{(cM^{(1)})_{ij}} \; cM^{(1)} \in W \qquad [0.5pt]$$

b) $\dim(W) = n(n-1)$ [1pt]

Basis: $\beta = \{ E'_{ij}, \; i = 1, \dots n, \; j = 1 \dots n-1 \}$,

$E'_{ij} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ heeft 1 op positie (i,j), -1 op positie (i,n), 0 op alle andere posities

$\mathcal{B}$ spant W op

$\mathcal{B}$ is lin. onafh.

$|\mathcal{B}| = n(n-1)$ [1pt]

Andere duidelijke redenering [1pt]
(alternatieve redenering die toch correct is)

3. 1) $S = \emptyset \Rightarrow span(S) = \{0\} \subseteq W$ [1pt]

2) Neem $w \in span(S)$, $S \neq \emptyset$ [1pt]

$w = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, waarbij $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$
[1pt]

$v_1, \ldots, v_n \in S \Rightarrow v_1, \ldots, v_n \in W$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \ldots + a_1 v_n \in W$ [1pt]

$w \in W$, w is een willekeurige vector in $span(S) \Rightarrow span(S) \subseteq W$. [1pt]

4. $(x^3 + 11x^2 + 9x + 7) = a_1(x^3 - x^2 + x - 1)$
$+ a_2(x^3 + 2x^2 + 3x + 1) + a_3(x^2 - 2x + 2)$ [1pt]

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 &= 11 \\ a_1 + 3a_2 - 2a_3 &= 9 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 &= 7 \end{aligned}$$ [1pt]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

standaardde rijvorm

[2pt]

$a_3 = 0, \quad a_2 = 4 \quad a_1 = -3$ [2pt]

(ook volledige punten geven als oplossing wordt gevonden van een standaardde rijvorm)

Bij de verkeerde oplossing: ~~1pt aftrek~~ (rekenfout): [1pt] aftrek voor de rekenfout, [1pt] ~~voor de~~ als de oplossing gecontroleerd was en student schrijft dat er een rekenfout was. In dit geval, als de rest goed is, totaal: [4pt]

Als oplossing ~~totaal~~ fout is (rekenfout) en <u>niet</u> gecontroleerd: Totaal [3pt].

5. We gaan na of S lin. onafh. is ~~kalkeerbaar en welke deel~~ [1pt]

(of S de ruimte $\mathbb{R}^3$ opspant)

$a_1(1,1,1) + a_2(-1,0,2) + a_3(2,3,4) + a_4(-1,0,0) = (0,0,0)$

[1pt]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$ [1pt]

Vectoren $\{(1,1,1)\ (-1,0,2)\ (2,3,4)\} = \beta$

(of $\{(1,1,1), (-1,0,2), (-1,0,0)\}$)

zijn lin. onafhankelijk want [2pt]

$$a_1(1,1,1) + a_2(-1,0,2) + a_3(-1,0,0) = (0,0,0)$$

heeft alléén triviale oplossing

(of $a_1(1,1,1) + a_2(-1,0,2) + a_4(-1,0,0)$ heeft alléén triviale oplossing)

Hier ook volledige punten rekenen [-1pt] als oplossing direct wordt gevonden voor 3 uit 4 vectoren.

$|\beta| = 3$, β lin. onafh. [1pt]

$\Rightarrow \beta$ is een basis

5. $v \in \text{Span}(S) \Rightarrow \exists\, v_1, \ldots, v_n \in S$
$a_1, \ldots, a_n \in F$

zodat

(*) $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ [1pt]

Stel voor dat er zijn $b_1, \ldots b_n \in F$ zodat

(**) $v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$ [1pt]

(*) − (**) $\underline{0} = (a_1 - b_1)v_1 + \ldots + (a_n - b_n)v_n$

$v_1 \ldots v_n$ - lin. onafh. $\Rightarrow a_1 - b_1 = \ldots = a_n - b_n = 0$

$\Rightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ [3pt]