Integrale Toets.

Lineaire Structuren 1. 2013-201300056-1A: Structuren en Modellen
donderdag 31 oktober 2013; 10.45 - 12.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

4½ **1.** [5pt] Laat S een lineair *onafhankelijke* verzameling zijn in vectorruimte V. Zij $v \in V$ een vector zodat $v \notin S$ en $S \cup \{v\}$ is een lineair *afhankelijke* verzameling. Bewijs dat Span(S) = Span$(S \cup \{v\})$.

4½ **2.** [6pt] Gegeven is een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$T(a, b, c) = (a + 3b + 3c, 2a + 3b + 4c, c).$$

Beargumenteer dat T een isomorfisme is en bereken T^{-1}.

4½ **3.** [5pt] V en W zijn vectorruimtes, $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding. Bewijs dat als T injectief (one-to-one) is, dan $\dim(V) \leq \dim(W)$.

4. Gegeven is een lineair systeem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & & = 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = 4 \\ -x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +9x_4 & -6x_5 & = -6 \end{array}$$

4 (a) [6pt] Los het systeem op. Geef de algemene oplossing van dit systeem.

1½ (b) [4pt] Bepaal de oplossingsverzameling K_H voor het bijbehorende homogeen systeem $Ax = \underline{0}$. Bepaal de basis en dimensie van K_H.

(c) [4pt] Geef een voorbeeld van een 5×3 matrix B zodat $B \neq O$ en $AB = O$, waarbij O een nul-matrix is. Bepaal de afmetingen van AB.

4 **5.** [4pt] A is een inverteerbare $n \times n$ matrix. Laat zien dat $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

3½ **6.** [6pt] Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

Totaal: 40 punten

NB: cijfer=[aantal punten]/4.