Tentamen Lineaire Structuren 1 voor TW (201100100)
maandag 6 januari 2014

Dit tentamen bestaat uit 9 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

1. [5pt] Een verzameling V bestaat uit vectoren (a_1, a_2) met $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Optelling en scalaire vemenigvuldiging zijn gedefinieerd als volgt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + 1), \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$? Motiveer uw antwoord.

2. [5pt] Gegeven is $S \subseteq P_2(\mathbb{R})$:

$$S = \{x^2 + 2x + 1, -2x^2 + x - 1, x^2 + 1, 3x - 2\}.$$

Ga na of S een basis bevat voor $P_2(\mathbb{R})$. Zo ja, geef een voorbeeld van $\beta \subseteq S$ zodat β een basis is voor $P_2(\mathbb{R})$. Zo nee, waarom niet?

3. [5pt] Bewijs de volgende stelling.

Stelling. Laat V een vectorruimte zijn en $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Als S lineair onafhankelijk is, dan zijn er voor elke $w \in \text{span}(S)$ *unieke* coëfficienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zodat $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$.

4. Een lineaire afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ is gegeven door

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

(a) [6pt] Neem

$$\beta = \{1, x, x^2\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als georderde basis (ordered basis) voor, respectivelijk, $P_2(\mathbb{R})$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Bepaal $[T]_\beta^\gamma$.

(b) [4pt] Is T injectief? Motiveer uw antwoord.

(c) [3pt] Ga na dat $[T(p(x))]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [p(x)]_\beta$ voor $p(x) = x^2 + 2x + 3$.

Z.O.Z.

5. [5pt] V en W zijn vectorruimtes, $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding. Bewijs dat als T surjectief (onto) is, dan $\dim(V) \geq \dim(W)$.

6. Gegeven is de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 12 & -7 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 6 & -10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [6pt] Los het systeem $Ax = b$ op waarbij $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. Geef de algemene oplossing van dit systeem.

(b) [3pt] Is het stelsel $Ax = b$ consistent voor alle $b \in \mathbb{R}^3$? Motiveer uw antwoord.

(c) [4pt] Bepaal de oplossingsverzameling K_H voor het bijbehorende homogeen systeem $Ax = \underline{0}$. Bepaal de basis en dimensie van K_H.

7. [4pt] A en B zijn $n \times n$ matrices. Laat zien dat als AB inverteerbaar is dan zijn A en B inverteerbaar.

8. [4pt] Bereken het volume van het blok bepaald door de vectoren u, v en w.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. [6pt] Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bereken de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.

Totaal: 60 punten

NB: cijfer=[aantal punten]/6.