Toets Chapter 1. Lineaire Structuren 1. 2014-201300056-1A: Structuren en Modellen

26 september 2014, 13:45-15:15 Deze toets bestaat uit 6 opgaven. Totaal: 30 punten. Cijfer=[aantal punten]/3

Uitwerking

1. [5pt] Een verzameling V bestaat uit vectoren (a_1, a_2) met $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn gedefinieerd als volgt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (-a_1 - b_1, -a_2 - b_2), \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$? Motiveer uw antwoord.

Bedenk dat V gesloten moet zijn voor de gegeven bewerkingen en dat de 8 voorwaarden voor een vectorruimte moeten gelden. Omdat de scalaire vermenigvuldiging dezelfde is als in $\mathbb{R}^2$, is het verstandig de voorwaarden over de optelling nauwkeurig te bekijken.

Uitwerking

Eerste mogelijkheid: associativiteit van de optelling geldt niet, immers: Laten $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ en (c_1, c_2) elementen van V zijn. Dan:

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = (-a_1 - b_1, -a_2 - b_2) + (c_1, c_2) =$$
$$(-(-a_1 - b_1) - c_1, -(-a_2 - b_2) - c_1) = (a_1 + b_1 - c_1, a_2 + b_2 - c_1) \quad (*)$$

en

$$(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1, a_2) + (-b_1 - c_1, -b_2 - c_2) =$$
$$(-a_1 - (-b_1 - c_1), -a_2 - (-b_2 - c_1)) = (-a_1 + b_1 + c_1, -a_2 + b_2 + c_1) \quad (**)$$

In het algemeen zijn (*) en (**) niet gelijk aan elkaar.
Conclusie: V is met deze bewerkingen geen vectorruimte over $\mathbb{R}$.
Met een voorbeeld aantonen dat de associativiteit voor optellen niet opgaat is ook een goede werkwijze.

Tweede mogelijkheid: Toon aan dat er geen nulelement is. Stel er is wel een nulelement en geef dit aan met (n_1, n_2). Dan geldt voor willekeurige (a_1, a_2) en (b_1, b_2) uit V:

$$(a_1, a_2) + (n_1, n_2) = (a_1, a_2) \qquad \text{en} \quad (b_1, b_2) + (n_1, n_2) = (b_1, b_2).$$

Ofwel

$$(-a_1 - n_1, -a_2 - n_2) = (a_1, a_2) \qquad \text{en} \quad (-b_1 - n_1, -b_2 - n_2) = (b_1, b_2).$$

Hieruit volgt $n_1 = -2a_1$ en ook $n_1 = -2b_1$. Voor $a_1 \neq b_1$ volgt dan $n_1 \neq n_1$. Dit is niet mogelijk, dus er bestaat geen nulelement.
Conclusie: V is met deze bewerkingen geen vectorruimte over $\mathbb{R}$.

2. [5pt] V is een vectorruimte en $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Bewijs dat span($S$) een deelruimte is van V.

Schrijf definitie span(S) uit en ga de voorwaarden (a), (b) en (c) van stelling 1.3 na.

Uitwerking
Span(S)=$\{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n \quad | \quad a_1, a_2, \cdots a_n \in F\}$.
(a) $0v_1 = \underline{0} \in$ span(S);
(b) Stel x en y zijn vectoren uit span(S). Dan zijn er $a_1, a_2, \cdots a_n$ en $b_1, b_2, \cdots b_n$ met

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n \quad \text{en} \quad y = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots b_nv_n$$

Dus
$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots (a_n + b_n)v_n$$

Dus ook $x + y$ is weer een lineaire combinatie van de vectoren van S,
ofwel $x + y \in$ span(S).
(c) Stel $x \in$ span(S) en $c \in F$. Dan zijn er weer $a_1, a_2, \cdots a_n$ zodat $x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n$.
Dus
$$cx = ca_1v_1 + ca_2v_2 + \cdots ca_nv_n.$$

Ook $cx \in$ span(S).
Uit (a), (b) en (c) volgt dat span(S) een lineaire deelruimte is van V.

Velen schrijven span(S)=$(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n)$. In feite staat hier dat de verzameling vectoren span(S) gelijk is aan het element $(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n)$. Dat kan niet.

3. [5pt] V is een vectorruimte, $S_1 \subset S_2 \subset V$. (Hier $S_1 \subset S_2$ betekent dat voor elke $v \in S_1$ geldt $v \in S_2$ maar $S_1 \neq S_2$). Bewijs dat als span$(S_1) =$ span(S_2) dan is S_2 lineair afhankelijk.

Hier hebben we weer de definitie van span(S) nodig. Ook de definitie van lineair afhankelijk. Start met opschrijven wat $S_1 \neq S_2$ betekent. Ga dan verder met het gegeven dat span$(S_1) =$ span(S_2)

Uitwerking
Stel $S_1 = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$. Omdat $S_1 \subset S_2$ en dus $S_1 \neq S_2$ is er een $w \in S_2$ met $w \notin S_1$.
Gegeven is span$(S_1) =$ span(S_2). Vector w is element van S_2, dus $w \in$ span(S_2). Uit het gegeven volgt dan $w \in$ span(S_1). Dit betekent dat er $a_1, a_2, \cdots a_n$ zijn zodat $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n$.
Nu is $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n - w$ een lineaire combinatie van vectoren uit S_2 die gelijk is aan de nulvector, maar waarvan niet alle coëfficiënten gelijk zijn aan 0. Hieruit volgt dat S_2 lineaire afhankelijk is.

4. [5pt] Een vlak in $\mathbb{R}^3$ gaat door de punten $(0,0,0)$, $(0,1,1)$ en $(-2,-1,0)$. Ga na of het punt $(5,5,5)$ in dit vlak ligt.

Nagaan of een punt in een vlak ligt, waarbij het vlak opgespannen wordt door vectoren x en y betekent dat het punt een lineaire combinatie van x en y moet zijn.

Uitwerking

Het vlak door de punten $(0,0,0)$, $(0,1,1)$ en $(-2,-1,0)$ is het vlak dat wordt opgespannen door de vectoren $(0,1,1)$ en $(-2,-1,0)$. De vraag of het punt $(5,5,5)$ in het vlak ligt is gelijk aan de vraag of $(5,5,5)$ een lineaire combinatie is van de vectoren $(0,1,1)$ en $(-2,-1,0)$.

Welnu, $(5,5,5) = a(0,1,1) + b(-2,-1,0)$ heeft geen oplossing, immers uit de vergelijking horende bij de eerste component volgt $-2b = 5$ ofwel $b = -\frac{5}{2}$. De vergelijking horende bij de derde component levert $a = 5$. Vul dit in in de tweede component dan krijgen we $5 + \frac{5}{2} = 5$, hetgeen niet waar is. Dus er is geen oplossing voor a en b, dus $(5,5,5)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(0,1,1)$ en $(-2,-1,0)$.

Conclusie: $(5,5,5)$ ligt niet in het vlak door de punten $(0,0,0)$, $(0,1,1)$ en $(-2,-1,0)$.

5. [5pt] Gegeven is de verzameling matrices $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Is β een basis voor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$? Motiveer uw antwoord.

Definitie van een basis en voorwaarden waaronder een stelsel vectoren een basis is gebruiken. Ook kennis over de dimensie van de vectorruimte $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ is nuttig. Corrolary 2 van section 1.6 kan hier goed gebruitk worden.

Uitwerking

De dimensie van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ is 4. De verzameling β bevat precies 4 elementen. Als aangetoond kan worden dat de vectoren uit β een lineair onafhankelijk stelsel vormen, dan is β een basis voor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Stel $\quad a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (*)

Als deze vergelijking alleen de triviale oplossing heeft, dan is β lineair onafhankelijk.
Het oplossen van (*) is gelijk aan het oplossen van het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a & & & + & 3c & & & = & 0 \\ a & + & 2b & - & c & & & = & 0 \\ a & - & 3b & + & 10c & & & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 0 \end{array} \right.$$

Dus $d = 0$. Uit de eerste vergelijking volgt $a = -3c$. Vul dit in in de tweede vergelijking, dan vind je $b = 2c$. De derde vergelijking wordt nu $c - 0$. Het stelsel heeft alleen de triviale oplossing, dus β is lineair onafhankelijk.

Conclusie: β is een basis van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Het is ook mogelijk om aan te tonen (a) β is een lineaire onafhankelijk stelsel en (b) elke vector uit $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ is te schrijven als lineaire combinatie van de vectoren uit β. Uit (a) en (b) volgt dan weer: β is een basis van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

6. [5pt] Laat $f(x)$ een polynoom zijn van graad n. Bewijs dat voor elk polynoom $g(x) \in P_n(\mathbb{R})$ er getallen $a_0, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ zijn zodat

$$g(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x),$$

waarbij $f^{(n)}(x)$ is de n-de afgeleide van $f(x)$.

Het is handig eerst de collectie polynomen $f^{(i)}(x)$ met $i = 0, 1, \cdots n$ een naam te geven. Vervolgens laat je zien dat deze verzameling polynomen een basis is voor $P_n(\mathbb{R})$. Immers, hier kan je dan uit concluderen dat een willekeurig polynoom uit $P_n(\mathbb{R})$ te schrijven is als lineaire combinatie van de afgeleiden van polynoom $f(x)$.

Uitwerking

Laat β de volgende verzameling zijn: $\beta = \{f^{(i)}(x) \quad | \quad i = 0, 1, \cdots n\}$.
Merk op: graad$f^{(i)} = n - i$. Stel er zijn constanten $c_0, c_1, \cdots c_n$ met

$$c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = \underline{0}, \text{voor alle} x \in \mathbb{R}$$

Omdat $f(x)$ het enige polynoom is uit β van graad n, zal gelden $c_0 = 0$. Immers de coëfficiënt van x^n moet gelijk aan 0 zijn.
Maar dan geldt:

$$c_1 f'(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = 0, \text{voor alle} x \in \mathbb{R}$$

Een zelfde redenering: $f'(x)$ is het enige polynoom uit β van graad $n-1$, dus er moet gelden $c_1 = 0$. Immers de coëfficiënt van $x^{(n-1)}$ moet gelijk aan 0 zijn.
Dit kan voortgezet worden tot $c_n = 0$. Conclusie: β is een lineair onafhankelijk stelsel.
Verder geldt: dimensie van $P_n(\mathbb{R})$ is $n + 1$ en het aantal elementen van β is $n + 1$, dus β is een basis van $P_n(\mathbb{R})$. Hieruit volgt dat elk polynoom $g(x) \in P_n(\mathbb{R})$ te schrijven is als lineaire combinatie van vectoren uit β.