Toets Chapter 1. Lineaire Structuren 1. 2014-201300056-1A: Structuren en Modellen

26 september 2014, 13:45-15:15
Deze toets bestaat uit 6 opgaven.
Totaal: 30 punten. Cijfer=[aantal punten]/3

1. [5pt] Een verzameling V bestaat uit vectoren (a_1, a_2) met $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn gedefinieerd als volgt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (-a_1 - b_1, -a_2 - b_2), \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$? Motiveer uw antwoord.

2. [5pt] V is een vectorruimte en $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Bewijs dat span$(S)$ een deelruimte is van V.

3. [5pt] V is een vectorruimte, $S_1 \subset S_2 \subset V$. (Hier $S_1 \subset S_2$ betekent dat voor elke $v \in S_1$ geldt $v \in S_2$ maar $S_1 \neq S_2$). Bewijs dat als span$(S_1) =$ span(S_2) dan is S_2 lineair afhankelijk.

4. [5pt] Een vlak in $\mathbb{R}^3$ gaat door de punten $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ en $(-2, -1, 0)$. Ga na of het punt $(5, 5, 5)$ in dit vlak ligt.

5. [5pt] Gegeven is de verzameling matrices $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Is β een basis voor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$? Motiveer uw antwoord.

6. [5pt] Laat $f(x)$ een polynoom zijn van graad n. Bewijs dat voor elk polynoom $g(x) \in P_n(\mathbb{R})$ er getallen $a_0, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ zijn zodat

$$g(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x),$$

waarbij $f^{(n)}(x)$ is de n-de afgeleide van $f(x)$.