Uitwerking
Toets Lineaire Structuren 1
27-10-2014

1. $S = \{u, v\}$ lin. afh. $\Leftrightarrow$ één van de vectoren is een veelvoud van de andere.

Bewijs

$\Rightarrow$ $\{u, v\}$ lin. afhankelijk $\Rightarrow$

$\exists\ a, b$ zodat $au + bv = \underline{0}$
en $a \neq 0$ of $b \neq 0$.

Neem $a \neq 0$ (zonder verlies van algemeenheid)

$$au = -bv$$
$$u = -(b/a)v$$

$\Rightarrow u$ is een veelvoud van v.

$\Leftarrow$ $u = av \Rightarrow u - av = \underline{0}$

$$1 \cdot u - a \cdot v = \underline{0}$$

coëfficient $1 \neq 0 \Rightarrow \{u, v\}$ lin. afh. ∎

2. Nee. Neem $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T((x, y)) = (x, 0)$ - projectie.

$R(T) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ Neem $a \neq 0$, $x \neq 0$

$(x, -a) \in W \setminus R(T) \cup \{\underline{0}\}$
$(x, a) \in W \setminus R(T) \cup \{\underline{0}\}$

$(x, a) + (x, -a) = (2x, 0) \in R(T)$

$\Rightarrow (x, a) + (x, -a) \notin W \setminus R(T) \cup \{\underline{0}\}$
$\Rightarrow W \setminus R(T) \cup \{\underline{0}\}$ is geen deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

3. $T(a,b) = (15a+4b,\ 10a-6b)$

$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ $\quad \beta' = \{(3,2),(-2,3)\}$

a) Kolom j van $[T]_\beta^{\beta'}$ is $[T(e_j)]_{\beta'}$ $\quad j=1,2$

(want $\beta = \{e_1, e_2\}$)

$T((1,0)) = (15,10) = 5\cdot(3,2) + 0\cdot(-2,3)$

$[T((1,0))]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T((0,1)) = (4,-6) = 0\cdot(3,2) - 2\,(-2,3)$

$[T((0,1))]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$[T]_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $[T]_\beta = \left([T((1,0))]_\beta \; [T((0,1))]_\beta \right)$

$= \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$

Alternatief: $\quad Q = [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$[T]_\beta = Q\,[T]_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$

$[T((1,2))]_\beta = [T]_\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad T((1,2)) = (23,-2)$

4. $T: M_{3\times3}(F) \to P_5(F)$

$\dim(M_{3\times3}(F)) = 9$
$\dim(P_5(F)) = 6$

Dimensie stelling:

$\dim(M_{3\times3}(F)) = \dim(R(T)) +$
$+ \dim(N(T))$

$R(T) \subseteq P_5(F)$ - deelruimte van $P_5(F)$

$\Rightarrow \dim(R(T)) \leq 6$

$\dim(N(T)) = 9 - \dim(R(T))$
$\geq 9-6 = 3$

$\dim(N(T)) \geq 3 \Rightarrow N(T) \neq \{\underline{0}\}$
$\Rightarrow T$ is niet injectief. ■

5. $T: V \to W$ isomorfisme $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim(V) = \dim(W) = n$
$T(\beta) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ bevat n vektoren $\Rightarrow$ We moeten laten zien dat $T(\beta)$ lin. onafh. is <u>of</u> als $T(\beta)$ W opspant. Dan is $T(\beta)$ een basis voor W.

We laten zien dat $T(\beta)$ lin. onafh. is

Stel voor dat $T(\beta)$ <u>niet</u> lin. onafh. is

Dan er zijn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zodat

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \ldots + a_n T(v_n) = \underline{0}$$

met niet alle a_i's gelijk aan nul.

Omdat ~~at~~ T een isomorfisme is, bestaat er een lin. afbeelding T^{-1}

Dan

$$T^{-1}(a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \ldots + a_n T(v_n)) = T^{-1}(\underline{0})$$

$T^{-1}(\underline{0}) = \underline{0}$ want T^{-1} is een lin afbeelding

$\Rightarrow$

$$a_1 T^{-1}(T(v_1)) + a_2 T^{-1}(T(v_2)) + \ldots + a_n T^{-1}(T(v_n)) = \underline{0}$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = \underline{0}$$

met niet alle a_i's gelijk aan 0.

Maar dat kan niet want $\{v_1, \ldots, v_n\} = \beta$ is lin. onafh.

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

$\Rightarrow T(\beta) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ - lin. onafh.

$T(\beta)$ is een verzameling van n vectoren in W, $\dim(W) = n$ en $T(\beta)$ lin. onafh. $\Rightarrow T(\beta)$ is een basis voor W ■

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$x_5 = -1$

x_3, x_4 - vrij

$x_2 = 4x_{\cancel{3}4} - 4x_3$

$x_1 = 6 - 2x_4 + x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

7. $$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\nearrow$

Eigenwaarden: $\lambda = 2$, $\lambda = 3$

Voorbeeld van een eigenvector.

Neem $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\,x = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$

$-x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 = 2x_2$

Neem $x_2 = 1$

$(2, 1, 0)$ – eigenvector

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$