Uitwerking Toets Math β1, 16 oktober 2015

1/(a) Methode I: $\int \frac{2}{x}\, dx = 2 \ln x + C$

neem $v(x) = e^{\ln x^2} = x^2$ —— ½ punt

Vermenigvuldig de DV hiermee

$$\underbrace{x^2 y' + 2xy}_{} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = 1 \quad \text{—— ½ punt}$$

$$x^2 y = \int 1\, dx = x + C \quad \text{—— ½ punt}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x+C}{x^2}} \quad \text{—— ½ punt}$$

OF Methode II: Los eerst op $y' + \frac{2}{x} y = 0$

scheiden van variabelen:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{-2}{x}\, dx \quad \text{—— ½ punt}$$

geeft $y(x) = \frac{K}{x^2}$

variatie van constanten:

probeer $y(x) = \frac{k(x)}{x^2}$ als oplossing. — ½ punt

Invullen in de DV:

$$\left(\frac{k'(x)}{x^2} - 2\frac{k(x)}{x^3}\right) + \frac{2}{x}\frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

dus $k'(x) = 1$ —— ½ punt

en $k(x) = x + C$

oplossing: $\boxed{y(x) = \frac{x+C}{x^2}}$ —— ½ punt

Vul beginwaarde in: $y(1) = 2$ geeft: $C = 1$ —— ½ punt

Oplossing: $\boxed{y(x) = \frac{x+1}{x^2}}$ —— ½ punt

1/(b) $y(x) = x\,v(x)$

dus $y'(x) = v(x) + x\,v'(x)$ ——— ½ punt

invullen in de DV geeft de vergelijking:

$$v(x) + x\,v'(x) = v(x) - e^{-v(x)}$$

ofwel

$$x\,v' = e^{-v}$$ ——— ½ punt

Deze kan opgelost worden door scheiden van variabelen:

$$\int e^{v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$ ——— 1 punt

$$e^{v} = \ln x + C$$
$$v = e^{\ln x + C}$$
$$= kx$$ ——— ½ punt

Nu volgt oplossing voor de DV:

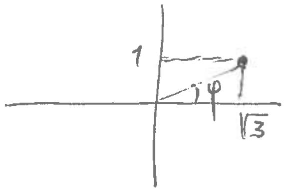
$$\boxed{y = kx^2}$$ ——— ½ punt

2/(a)

$$w = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{4i + 4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3} + i$$ ——— ½ punt

$$|w| = \sqrt{3+1} = 2$$ ——— ½ punt

$$\varphi = \arg w = \arctan \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Re} w} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ——— ½ punt



dus $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ ——— ½ punt

($\varphi \neq 1\frac{1}{6}\pi$ uitsluiten door bijv. een plaatje.)

2/(b) Los op: $z^3 = -8i$

Schrijf $z = re^{i\varphi}$ ——— ½ pnt

Dan $r^3 e^{3i\varphi} = -8i = 8e^{\frac{3}{2}\pi i}$

dus $r^3 = 8$ en daaruit volgt $r = 2$ — ½ pnt

en $3\varphi = \frac{3}{2}\pi i + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Neem $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_2 = \frac{7}{6}\pi$ en $\varphi_3 = \frac{11}{6}\pi$ ——— ½ pnt

De oplossingen zijn

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 2e^{\frac{1}{2}\pi i} \\ z_2 &= 2e^{\frac{7}{6}\pi i} \\ z_3 &= 2e^{\frac{11}{6}\pi i} \end{aligned}\right\} \text{——— ½ pnt}$$

3/ Schrijf $z = a + bi$ en $w = c + di$

Dan $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$ ——— ½ pnt

Dus $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$ ——— ½ pnt

$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) =$

$= (ac - bd) + i(-bc - ad) =$ — ½ pnt

$= (ac - bd) - i(ad + bc)$

Conclusie: $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ——— ½ pnt

OF! Schrijf $z = re^{i\varphi}$ dan $\bar{z} = re^{-i\varphi}$

en $w = se^{i\theta}$ dan $\bar{w} = se^{-i\theta}$) — ½ pnt

$\overline{zw} = \overline{(re^{i\varphi})(se^{i\theta})} = \overline{rse^{i(\varphi+\theta)}} = rse^{-i(\varphi+\theta)}$ — ½ pnt

$\bar{z}\bar{w} = (re^{-i\varphi})(se^{-i\theta}) = rse^{-i(\varphi+\theta)}$ ——— ½ pnt

Conclusie: $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ——— ½ pnt

4/ $y'' - 4y = x e^x + \cos(2x)$ ⊛

Bijbehorende homogene DV: $y'' - 4y = 0$

karakteristieke vgl: $\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2$ — ½ pnt

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ — ½ pnt

Probeer $y_{P_1} = (Ax+B)e^x$ voor $y'' - 4y = xe^x$ — ½ pnt

Dan $y_{P_1}' = (A + Ax + B)e^x$ en

$y_{P_1}'' = (2A + Ax + B)e^x$

Invullen:

$(2A + Ax + B)e^x - 4(Ax+B)e^x = xe^x$ — ½ pnt

$$\begin{cases} A - 4A = 1 \\ 2A + B - 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Dus $y_{P_1} = (-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9})e^x$ is opl. van $y'' - 4y = xe^x$ — ½ pnt

Probeer $y_{P_2} = C\cos(2x) + D\sin(2x)$ voor $y'' - 4y = \cos(2x)$ — ½ pnt

Invullen:

$(-4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)) - 4(C\cos(2x) + D\sin(2x)) = \cos(2x)$

$$\begin{cases} -4C - 4C = 1 \\ -4D - 4D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{8} \\ D = 0 \end{cases}$$

½ pnt

Dus $y_{P_2} = -\frac{1}{8}\cos(2x)$ is opl. van $y'' - 4y = \cos(2x)$ — ½ pnt

Algemene oplossing van ⊛ is:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right)e^x - \frac{1}{8}\cos(2x)}$$

1 pnt

5/(a) $\underline{u} \times \underline{v} \perp \underline{u}$ en $\underline{u} \times \underline{v} \perp \underline{v}$ —— 1 pnt

$\underline{u} \times \underline{v} = \langle 30, 9, 5 \rangle$ —— 1 pnt

(bijv door berekening

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
)

5/(b) <u>Te bewijzen:</u> $\underline{u}$ en $\underline{v}$ parallel $\Leftrightarrow \underline{u} \circ \underline{v} = \pm |\underline{u}||\underline{v}|$

<u>Bewijs</u>:

($\Rightarrow$) Stel $\underline{u}$ en $\underline{v}$ zijn parallel,

dan $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$ met φ de hoek tussen $\underline{u}$ en $\underline{v}$ —— ½ pnt

Omdat $\underline{u} \circ \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\varphi$ —— ½ pnt

geldt nu $\underline{u} \circ \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|$ als $\varphi = 0$

en $\underline{u} \circ \underline{v} = -|\underline{u}||\underline{v}|$ als $\varphi = \pi$

Hieruit volgt $\underline{u} \circ \underline{v} = \pm |\underline{u}||\underline{v}|$ —— ½ pnt

($\Leftarrow$) Stel $\underline{u} \circ \underline{v} = \pm |\underline{u}||\underline{v}|$

Omdat $\underline{u} \circ \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\varphi$ met φ de hoek tussen $\underline{u}$ en $\underline{v}$

geldt: $\cos\varphi = \pm 1$

ofwel $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$

En dit betekent: $\underline{u}$ en $\underline{v}$ zijn parallel —— ½ pnt

Conclusie: $\underline{u}$ en $\underline{v}$ parallel $\Leftrightarrow \underline{u} \circ \underline{v} = \pm |\underline{u}||\underline{v}|$ —— ½ pnt

En het laatste ½ pnt gaat naar een nette bewijsstructuur