Kenmerk : TW2013/LEI/R

Courses : **Mathematics A (Euclides) and B1 (Leibniz)**

Date : November 4, 2013
Time : 8.45 – 11.45 hrs

Motivate all your answers.
The use of electronic devices is not allowed.

1. (a) [1 pt] Give an example of two statements p and q such that $p \to q$ is true and $q \to p$ is false.

   (b) [3 pt] Consider the following statement about sets A, B and C:

$$(A \cup B) - C = (A - B) \cup (B - C).$$

   Construct a membership table in order to examine if this statement is true. If it is true explain why; if it is false, provide a counterexample.

2. (a) [2 pt] Let $m, n \in \mathbb{Z}$. Prove that if m and n are odd, then also mn is odd.

   (b) [4 pt] Prove with mathematical induction that for all $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ is divisible by 3 (that is: $n^3 + 2n = 3k$ for some $k \in \mathbb{Z}$).

3. Consider strings consisting of 12 digits, for example: 074491530388. Determine the number of such strings if

   (a) [1 pt] there are no further restrictions;

   (b) [3 pt] each string must contain exactly 3 zeros and at least 6 ones.

4. Define the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

   (a) [1 pt] Is f one-to-one? Motivate your answer.

   (b) [2 pt] Determine the range of f.

5. Consider the points $P = (1, -\sqrt{3}, 3)$, $Q = (3, 0, 6)$ and $R = (3, -2\sqrt{3}, 0)$.

   (a) [2 pt] Find the vector with length 1 in the direction of $\overrightarrow{RQ}$.

   (b) [2 pt] Find the angle $\angle RPQ$ (the angle between the line segments PQ and PR).

   (c) [2 pt] Find the surface area of the triangle with vertices P, Q and R.

6. The complex number z is defined as

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

   (a) [2 pt] Find the real and imaginary part of z^2.

   (b) [1 pt] Find the modulus (absolute value) and the argument of z^2.

(c) [1 pt] Find the real and imaginary part of z^6.

7. [2 pt] Define

$$y(x) = \ln(1 + e^x).$$

Show that y is a solution of the differential equation

$$y' = e^{x-y}.$$

8. [3 pt] Solve the following intial value problem:

$$\begin{cases} x^2y' + 4xy = 3, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

9. [4 pt] Solve the following initial value problem:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x + 2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Total: 36 points

Vakken : **Mathematics A (Euclides) en B1 (Leibniz)**

Datum : 4 november 2013
Tijd : 8.45 – 11.45 uur

Motiveer al uw antwoorden.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

1. (a) [1 pt] Geef een voorbeeld van twee beweringen p en q zo dat $p \to q$ waar is en $q \to p$ onwaar is.

   (b) [3 pt] Beschouw de volgende bewering over verzamelingen A, B en C:

$$(A \cup B) - C = (A - B) \cup (B - C).$$

   Construeer een membership table om te onderzoeken of deze bewering waar is. Als ze waar is leg dan uit waarom; als ze onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld.

2. (a) [2 pt] Laat $m, n \in \mathbb{Z}$. Toon aan dat als m en n oneven zijn, ook mn oneven is.

   (b) [4 pt] Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \geq 1$, $\;n^3 + 2n$ deelbaar is door 3 (ofwel: $n^3 + 2n = 3k$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$).

3. Beschouw rijtjes van 12 cijfers, zoals: 074491530388. Bepaal het aantal van zulke rijtjes als

   (a) [1 pt] er geen verdere restricties zijn;

   (b) [3 pt] elk rijtje precies 3 nullen en minstens 6 enen moet bevatten.

4. Definieer de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

   (a) [1 pt] Is f één-éénduidig (one-to-one)? Motiveer je antwoord.

   (b) [2 pt] Bepaal het beeld (range) van f.

5. Beschouw de punten $P = (1, -\sqrt{3}, 3)$, $Q = (3, 0, 6)$ en $R = (3, -2\sqrt{3}, 0)$.

   (a) [2 pt] Bepaal de vector met lengte 1 in de richting van $\overrightarrow{RQ}$.

   (b) [2 pt] Bepaal de hoek $\angle RPQ$ (de hoek tussen de lijnstukken PQ en PR).

   (c) [2 pt] Bepaal de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten P, Q en R.

6. Het complexe getal z is gedefinieerd als

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

   (a) [2 pt] Bepaal het reële en het imaginaire deel van z^2.

   (b) [1 pt] Bepaal de modulus (absolute waarde) en het argument van z^2.

   (c) [1 pt] Bepaal het reële en het imaginaire deel van z^6.

7. [2 pt] Definieer

$$y(x) = \ln(1 + e^x).$$

Toon aan dat y een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$y' = e^{x-y}.$$

8. [3 pt] Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} x^2 y' + 4xy = 3, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

9. [4 pt] Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x + 2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Totaal: 36 punten