Toets Kansrekening en Statistiek (201300182)
vrijdag 14 maart 2014 van 15.45 - 17.15 uur

Deze toets bestaat uit 4 opgaven.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.
Gebruik van een rekenmachine is *niet* toegestaan.

1. Een gokker heeft twee munten, een gewone met een kop- en een muntzijde en een ongewone met aan beide zijden kop, en kiest lukraak een van beide munten.

   a. De gokker gooit de munt op en kop komt boven. Wat is de kans dat hij de gewone munt heeft gekozen?

   b. De gokker gooit dezelfde munt nog een keer op en weer ligt kop boven. Wat is de kans dat hij de gewone munt heeft gekozen?

   c. De gokker gooit dezelfde munt een derde keer, maar nu komt munt boven. Wat is de kans dat hij de gewone munt heeft gekozen?

2. De simultane kansfunctie $P(X = i, Y = j)$ van de stochastische variabelen X en Y wordt gegeven door

$$P(X = i,\, Y = j) = c\,\frac{2^i}{i!}\frac{3^j}{j!}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots .$$

   a. Bepaal de constante c.

   b. Bereken $P(X + Y = 1)$.

   c. Bepaal de marginale kansfunctie van X en geef $E(X)$. Hoe wordt de verdeling van X genoemd?

   d. Zijn X en Y onderling onafhankelijk?

3. De stochastische variabele X is uniform verdeeld op het interval $(0, \pi)$.

   a. Bepaal de momentgenererende functie van X.

   b. Bepaal de verwachtingswaarde van $\sin(X)$.

   c. Bepaal de kansdichtheid van $Y = X^2$.

4. De stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots,$ zijn onderling onafhankelijk en gelijk verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x & 1 \le x \le 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   Zij $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$

Z.O.Z.

a. Laat zien dat var$(X_1) = \frac{1}{6}$.

b. Bepaal cov(X_1, S_2).

c. Bepaal de verwachtingswaarde en de variantie van S_n.

d. Geef een uitdrukking voor $\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1\right)$, in termen van de standaard-normale verdelingsfunctie $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-u^2/2} du$.

Normering:

1			2				3			4			
a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d
2	2	1	1	1	3	2	2	2	3	2	2	2	2

Eindcijfer: $\frac{\text{Totaal}}{27} \times 9 + 1$