

Hertentamen Wiskundige Statistiek (vakcode 201400218)

6 november 2015, 8:45 – 11:45.

Docent: A.V. den Boer. Modulecoördinator: P. Mandal.

Boeken, rekenmachines, laptops, telefoons e.d. zijn niet toegestaan.

Vraag 1. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk met gemeenschappelijke kansdichtheidsfunctie (pdf) $f(x; \theta)$ gegeven door

$$f(x; \theta) = \theta x^{-1-\theta},$$

als $x \geq 1$, en $f(x; \theta) = 0$ als $x < 1$; voor een onbekende parameter $\theta > 0$.

a. (3 pt) Bepaal de maximum-likelihood schatter $\hat{\theta}$ van θ .

Vraag 2. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en Bernoulli verdeeld, met onbekende parameter $p \in (0,1)$. Zij $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

a. (4pt) Laat zien dat \bar{X} een efficiënte schatter is van p .

Vraag 3. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en normaal verdeeld, met onbekende verwachting μ_X en onbekende variantie $\sigma_X^2 > 0$.

Zij verder $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, en zij Y_1, \dots, Y_m onderling onafhankelijk en normaal verdeeld, met onbekende verwachting μ_Y en onbekende variantie $\sigma_Y^2 > 0$, en allen onafhankelijk van X_1, \dots, X_n . Zij $\alpha \in (0,1)$.

a. (2 pt) Bepaal een (exact) $(1 - \alpha) \times 100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor σ_X^2 .

b. (2 pt) Bepaal een benaderend $(1 - \alpha) \times 100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_X - \mu_Y$.

c. (2 pt) Bepaal een (exacte) toets met significantieniveau α voor de nul- en alternatieve hypothese

$$H_0: \mu = 0, \quad H_1: \mu \neq 0.$$

d. (3 pt). Bepaal een (exacte) toets met significantieniveau α voor de nul- en alternatieve hypothese

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

Z.O.Z.

Vraag 4. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld, met onbekend gemiddelde $\mu > 0$. Zij $\alpha \in (0,1)$.

a. (3 pt) Construeer een (exacte of benaderende) likelihood ratio test met significantieniveau α voor de nul- en alternatieve hypothese:

$$H_0: \mu = 1,$$

$$H_1: \mu > 1.$$

Vraag 5. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en uniform verdeeld op het interval $(0, 2\theta)$, voor een onbekende $\theta > 0$. Zij $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

a. (3 pt) Laat zien dat \bar{X} een consistente schatter is van de mediaan van X_1 .