Toets 2 Statistiek - 24 oktober 2014 13.45 – 15.45 uur

Deze toets bestaat uit vijf opgaven. Separaat zijn de tabellen bijgevoegd. Er mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen telefoon of GR). Motiveer je antwoorden duidelijk.

Opgave 1

Gegeven is de volgende set van vier gepaarde waarnemingen (x_i, y_i)

1 4 6 5

i	1	2	3	4
x_i	3.09	4.67	7.72	6.89
y_i	4.56	4.44	9.29	8.01

3 2 8 7

Neem aan dat $(x_1, y_1),\ldots,(x_4, y_4)$ onderling onafhankelijke gepaarde waarnemingen van stochasten X en Y zijn, met X onafhankelijk van Y, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ en $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, voor onbekende μ_X, σ_X^2, μ_Y en σ_Y^2.

a. Toets de hypothese $H_0\colon \mu_X - \mu_Y = 0$ tegen $H_1\colon \mu_X - \mu_Y \neq 0$.
Voer de toets uit met behulp van de p-waarde (overschrijdingskans) en gebruik onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.10$.

Vat voor de volgende onderdelen de twee gegeven steekproeven op als **onafhankelijke aselecte steekproeven** uit de genoemde normale verdelingen.

b. Toets, met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.10$, of de varianties aan elkaar gelijk zijn.

c. Toets $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ tegen $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$, aangenomen dat $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.
Voer de toets uit met behulp van de p-waarde (overschrijdingskans) en gebruik onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.10$.

d. Toets met behulp van de rangsomtoets van Wilcoxon of Y stochastisch groter is dan X. Formuleer de hypothesen, geef de toetsingsgrootheid, geef het kritieke gebied bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$, en bepaal of de nulhypothese verworpen wordt of niet.

Opgave 2

Beschouw opnieuw de gegeven steekproeven en modelveronderstellingen als in vraag 1.
Bepaal een naar beneden begrensd 90%-betrouwbaarheidsinterval voor σ_X^2.

Opgave 3

De nationale voetbalelftallen van Nederland en België hebben in totaal 125 keer tegen elkaar gespeeld. Daarvan won Nederland 55 keer, België 41 keer, en werd het 29 keer gelijkspel.

a. Bepaal een benaderend tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval voor p = "de kans dat Nederland wint van België". Bespreek al je aannames.

Als we ons beperken tot de wedstrijden van de afgelopen 25 jaar, dan won Nederland 2 keer, België 3 keer, en werd er 4 keer gelijkgespeeld.

b. Bepaal een exact naar boven begrensd 90%-betrouwbaarheidsinterval voor p.

Vraag 4

Zij $X_1, .., X_n$ een aselecte steekproef uit een exponentiele verdeling met onbekend gemiddelde μ.
Beschouw de hypothesen

$$H_0: \mu = 1,$$
$$H_1: \mu > 1$$

Bepaal de aannemelijkheidsquotiënt-toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$ en geef het kritieke gebied indien $n = 100$.
(voor de exponentiele verdeling geldt: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (voor $x \geq 0$) en $\mu = \sigma = \frac{1}{\lambda}$ en

het aannemelijkheidsquotiënt is $\Lambda = \dfrac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}$)

Vraag 5

Zij $X_1, .., X_n$ aselecte steekproef uit normale verdeling $N(\mu, 1)$.
Beschouw de hypothesen:

$$H_0: \mu = 0$$
$$H_1: \mu > 0$$

We verwerpen H_0 voor grote waarden van het steekproefgemiddelde, met een gegeven onbetrouwbaarheidsdrempel α_0 in $(0, 0.5)$.
Zij $p(X_1, \dots, X_n)$ de rechteroverschrijdingskans (p-waarde), geschreven als stochastische functie van de data $X_1, \dots, X_n$.
Laat zien dat $P(p(X_1, .., X_n) \leq \alpha_0 | H_0) = \alpha_0$ (dus onder de aanname van de nulhypothese).

Normering

1				2	3		4	5	Totaal
a	b	c	d		a	b			
3	3	4	3	3	3	3	4	3	29