Reparatietoets: Analyse II
Statistiek en Analyse (201400218), 2015-2016

5-november-2015, 8:45 – 11:45 Totaal # Punten : 35 X 36

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands.
Succes!

1. (a.) Definieer de uniforme convergentie van een rij van reële functies. Gebruik hiervoor de ϵ-δ-N taal/argument. [2]

   (b.) Zij E een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Laat f en f_n, $n \in \mathbb{N}$ functies zijn van E naar $\mathbb{R}$. Veronderstel dat $f_n \to f$ uniform convergeert op E. Bewijs de volgende: [4]

   Indien iedere f_n uniform continu is op E, dan is f uniform continu op E.

   [Hint: voor alle $x, y \in E$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt er
   $$f(x) - f(y) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(y)\big) + \big(f_n(y) - f(y)\big).$$]

2. (a.) Formuleer de limiet-vergelijkingstest ("Limit Comparison Test"). [3]

   (b.) Zij $a_n \geq 0,\ b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Bewijs de volgende: [4]

   $$\text{Indien } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ en } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergeert, dan convergeert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ook.}$$

3. Onderzoek van de volgende reeksen of ze convergeren of divergeren. Geef ook aan of de convergentie absoluut is indien de reeks convergeert. [2+2]

   (a.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sin(k)}{k^3 - 2k^2 + 4}$

   (b.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2k)!}$

4. (a.) Geef de definitie van een samenhangende ("connected") metrische ruimte. [2]

   (b.) Bewijs door middel van een voorbeeld dat de doorsnede van twee samenhangende deelverzamelingen niet samenhangend hoeft te zijn. [2]

5. Zij X een metrische ruimte en E, A, B deelverzamelingen van X.

(a.) Geef de definitie van de inwendige, E^0, en de afsluiting, $\overline{E}$, van E. [2]

(b.) Bewijs dat $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$. [3]

6. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a.) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ op $\mathbb{R}^2$. [2]

(b.) Onderzoek of de functie f differentieerbaar is op $(0,0)$. [3]

7. [Voor deze opgave neem aan dat $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ een kolom vector is.]

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie op $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ met de totale afgeleide $Df(\mathbf{a})$, die een rij vector is. Veronderstel verder dat $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \neq 0$ voor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ met $\|\mathbf{h}\|$ voldoende klein.

Via de volgende stappen gaan we bewijzen dat de functie $\frac{1}{f}$ ook differentieerbaar is op $\mathbf{a}$ en dat er geldt

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(\mathbf{a}) = -\frac{Df(\mathbf{a})}{f^2(\mathbf{a})}.$$

(a.) Bewijs dat $(Df(\mathbf{a}))\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ begrensd is voor alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. [1]

(b.) Zij $T := -Df(\mathbf{a})/f^2(\mathbf{a})$. Laat zien dat [1]

$$\frac{1}{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})} - \frac{1}{f(\mathbf{a})} - T\mathbf{h} = \frac{f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + (Df(\mathbf{a}))\mathbf{h}}{f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}+\mathbf{h})} + \frac{[f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})]\,(Df(\mathbf{a}))\mathbf{h}}{[f(\mathbf{a})]^2 f(\mathbf{a}+\mathbf{h})}$$

voor voldoende kleine waarden van $\|\mathbf{h}\|$.

(c.) Bewijs dat $g := \frac{1}{f}$ differentieerbaar is op $\mathbf{a}$ met de totale afgeleide $Dg(\mathbf{a}) = T$. [3]

Cijfer:	$\frac{\text{behaalde punten}}{35} \times 9 + 1$ (afgerond tot een decimaal)