Deeltoets 1: Analyse II
Statistiek en Analyse (201400218), 2016-2017

27-september-2016, 8:45 – 10:15 Totaal aantal punten : 23

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands.
Het gebruik van een rekenmachine of een boek is niet toegestaan.
Succes!

1. (a.) Bepaal of de reeks $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^3}{(3k)!}$ convergert. [2]

   (b.) Zij $p \in \mathbb{R}$ en $p \geq 0$. Bewijs dat de reeks $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^p}$ convergeert d.s.d. als $p > 1$. [3]

   (c.) Zij $a_k \geq 0$, voor $k = 1, 2, 3, \ldots$ en de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert.

   Bewijs dat de reeks $\displaystyle\sum_{k=\cancel{0}1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k^p}$ convergert voor $p > \frac{1}{2}$. [2]

   (d.) Laat zien dat (c.) niet klopt als $p = \frac{1}{2}$. [1]

   [Hint: In (b.) beschouwde reesken kunnen nuttig zijn.]

2. (a.) Definieer (volledig) de absoluut convergentie van een reeks van reële functies. Gebruik hiervoor de ϵ-δ-N taal/argument. [3]

   (b.) Zij $E \subseteq \mathbb{R}$ en $f_n : E \to \mathbb{R}$ een functierij.

   Bewijs dat de functierij f_n convergeert uniform op E d.s.d. indien voor iedere $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat z.d.d. voor alle $x \in E$ geldt dat [4]

   $$n, m \geq N \quad \text{betekent dat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

3. (a.) Geef de definitie van de convergentiestraal van een machtreeks. [2]

   (b.) Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$.

   (i.) Laat zien dat $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, k\, x^{2k-1}$ de Maclaurinreeks van $f(x)$ is. [3]

   (ii.) Bepaal de convergentiestraal en het convergentiegebied van de reeks in **(i.)**. [3]

Cijfer:	$\dfrac{\text{behaalde punten}}{23} \times 9 + 1$ (afgerond tot twee decimalen)