Deeltoets 1: Analyse II

Staistiek en Analyse (201400218), 2014-2015

25-september-2014, 10:45 – 12:15 Totaal Punten : 25

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands
Success!

1. (a.) Definieer (volledig) de absolute convergentie van een reeks van reële getallen. [2]

   (b.) Onderzoek van de volgende reeksen of ze convergeren of divergeren. Geef ook aan of de convergentie absoluut is indien de reeks convergeert. [2+2]

   (i.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+5}{2k+\sqrt{k}}\right)^{k/2}$

   (ii.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}-\sin(k)}{k^{3/2}+\sin^2(k)}$

   (c.) Zij $a_k \geq 0$ een dalende rij voor $k = 0, 1, 2, \ldots$.
   Bewijs dat als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert, er geldt dat $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. [3]
   [Hint: $na_n = ma_n + (n-m)a_n$. Gebruik verder de relatie tussen $(n-m)a_n$ en $\sum_{k=m}^{n} a_k$]

2. (a.) Definieer de uniforme convergentie van een rij van reële functies. [2]

   (b.) Bewijs de volgende stelling: [4]
   Veronderstel dat $f_n \to f$ uniform convergeert op een gesloten interval $[a, b]$. Indien f_n integreerbaar is op $[a, b]$ dan is f ook integreerbaar en

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

3. Bewijs dat de functie $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ continu is op $\mathbb{R}$. [3]

4. Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n}(x-1)^n$.

   (a.) Bepaal de convergentiestraal. [2]

   (b.) Bepaal het convergentiegebied. [2]

   (c.) Bepaal de som (in compacte vorm) voor die waarden van x waarvoor de reeks convergeert. [3]

Cijfer: $\dfrac{\text{behaalde punten}}{25}\times 9+1$ (afgerond tot twee decimalen)