Kenmerk: EWI2015/TW/DMMP/003/MU

Tentamen 1, Module 7, Vakcode 201400433

Discrete Structuren & Efficiënte Algoritmes

Vrijdag 13 maart 2015, 13:45 - 16:45

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik van zelfgeschreven formulebladen, één dubbelzijdig A4 per onderdeel, is wel toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit drie onderdelen, en is gebaseerd op de volgende, geschatte tijdsbesteding per onderdeel (slechts als indicatie):

Algorithms & Data Structures (ADS)	1h	(30 punten)
Discrete Mathematics (DW)	1h 20 min	(40 punten)
Languages & Machines (L&M)	40 min	(20 punten)

Dus in totaal 30+40+20=90 punten. Incl. de 10 gratis punten zijn het 100 punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10.

Gebruik aub per onderdeel (ADS/DW/L&M) een nieuw vel!

Algorithms & Data Structures

1. Beschouw het volgende algoritme (met * voor vermenigvuldigen, // voor integer division (bv. 7//2 = 3), en **2 voor kwadraat):

```
def func(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        if n<4:
            return n
        else:
            return 2*func(n//4) + 6 + func(n//4)**2
```

   (a) Geef een recursieve uitdrukking van de tijdscomplexiteit van dit algoritme, uitgedrukt in het aantal rekenkundige operaties.

   (b) Wat is de complexiteitsklasse van dit algoritme?

2. Geef een algoritme dat voor een niet-lege binary search tree een node met de op één na kleinste waarde oplevert (en beargumenteer je oplossing). Neem aan dat de boom geen duplicaten bevat.

3. Een arts heeft nog n patienten te behandelen. Voor elke patient p_i is de geschatte benodigde tijd t_i minuten (een integer). De arts wil op een bepaalde dag minstens T minuten werken, maar liefst zo min mogelijk langer.

Geef een algoritme dat bepaalt wat de optimale verzameling patienten is die op die dag behandeld kan worden (dus zodat de arts zo min mogelijk langer dan T minuten werkt). Hint: gebruik dynamisch programmeren, uitgaand van de recurrente betrekking voor de functie $O(i,t)$ die aangeeft hoeveel tijd je overhoudt bij een optimale keuze uit $p_i, \ldots, p_n$ als de arts nog minstens t minuten wil werken:

- $O(i, 0) = 0$ for $1 \leq i \leq n+1$
- $O(n+1, t) = \infty$ if $t > 0$
- $O(i,t) = \min\{t_i - t, O(i+1,t)\}$ if $t_i \geq t$
- $O(i,t) = \min\{O(i+1, t-t_i), O(i+1,t)\}$ anders

en bereken $O(1,T)$.

Discrete Mathematics

4. (5 punten) Voor $a, b \in \mathbb{Z}$, neem aan dat $as + bt = 4$ en $ax + by = 7$ voor zekere $s, t, x, y \in \mathbb{Z}$. Laat zien dat a en b relatief priem zijn.

5. (10 punten)

   (a) Bereken de oplossing van de recurrente betrekking

   $$a_n - 10a_{n-1} + 25a_{n-2} = 16n + 8 \quad (n \geq 2) \quad \text{met } a_0 = 3 \text{ en } a_1 = 12\,.$$

   (b) Noem a_n het aantal strings uit $\{0,1,2\}^*$ van lengte n die geen oneven aantal 1-en bevatten. Bepaal a_1, a_2, en een recurrente betrekking voor a_n, $n \geq 3$. (Je hoeft deze betrekking niet op te lossen.)

6. (8 punten) Laat $G = (V, E)$ een bipartiete, ongerichte graaf zijn, zonder loops. Laat $|V| = n$ en $|E| = m > 1$. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende twee stellingen.

   (a) Als $m \leq 2n - 4$, dan is G planair.

   (b) Als G planair is, dan $m \leq 2n - 4$.

7. (7 punten) Wat is het aantal mogelijkheden om 50€ over drie personen te verdelen, zodat niemand minder dan 10€ krijgt, en bovendien één willekeurig iemand van de drie hooguit 15€ krijgt? Gebruik voor je berekening een genererende functie.

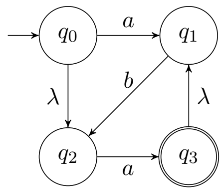
8. (10 punten) Laat $G = (V, E)$ een enkelvoudige, ongerichte graaf zijn, met lijn lengtes $d_e \geq 0$, $e \in E$. Laat $T \subseteq E$ een minimaal opspannende boom (MST) voor G zijn.

   (a) Is elk $e = \{u, v\} \in T$ een kortste pad van u naar v? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

   (b) Voor een willekeurig, gegeven $s \in V$, laat D_s de vereniging van de lijnen van *alle* kortste (s, v)-paden zijn, voor alle $v \in V \setminus \{s\}$. Bewijs dat $T \cap D_s \neq \emptyset$. (Hint: Beschouw $\delta(s)$.)

Languages & Machines

9. (8 punten) Beschouw de volgende eindige automaat, NFA-λ M:



   (a) Transformeer automaat M stapsgewijs naar een reguliere expressie.

   (b) Geef de λ-closure en de input-transitie functie van M in een tabel.

   (c) Transformeer automaat M systematisch naar een (onvolledige) DFA.

10. (12 punten) We introduceren de volgende 5 talen:

   - de taal $L_1 := \{a^i\, a^j \mid 0 < i < j\}$
   - de taal $L_2 := \{a^i\, b^j \mid 0 < i < j\}$
   - de taal L_3 van woorden w over $\Sigma = \{a, b\}$ met de eigenschap: *als* het aantal a's in w een drievoud is, *dan* is het aantal b's een tweevoud.
   - L_4 is een (willekeurige) eindige taal.
   - L_5 is een (willekeurige) niet-reguliere taal.

   Geef aan of de volgende talen regulier zijn of niet. Toon je antwoord aan door een constructie of een bewijs te geven.

   (a) taal L_1

   (b) taal L_2

   (c) taal L_3

   (d) taal $L_5 - L_4$