Exam 2015 Solutions

Antwoorden: Algorithms & Data Structures

1. (a) Merk op dat `func(n div 4)` twee keer wordt aangeroepen (niet erg handig, maar het staat er nu eenmaal). Verder worden er 6 rekenkundige bewerkingen gebruikt (een vermenigvuldiging, twee optellingen, twee divs, en een kwadraat), dus de recurrente betrekking wordt $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor n/4 \rfloor) + 6$.

   (b) Neem aan dat n een macht van 4 is (maakt voor het bepalen van de complexiteitsklasse niets uit), dan hebben we $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + 6$. We passen nu het Master Theorema toe, met $b = 2$ en $c = 4$, dus $E = log2/log4 = 1/2$. Er geldt dat $6 \in O(n^{1/2-\epsilon})$ voor een ϵ, dus we hebben geval 1, dus $T(n) \in \Theta(n^{1/2})$.

2. We zoeken eerst het kleinste element op in de BST door zoveel mogelijk naar links te gaan en komen zo uit op node x. Vervolgens gaan we op zoek naar het kleinste element groter dan $x.key$: als x een rechterkind heeft gaan we een keer naar rechts, en vervolgens zoveel mogelijk naar links. Heeft x geen rechterkind, dan nemen we de ouder van x.

```
def een_na_kleinste(T):
    x=T.root

    while x.left != null:
        x=x.left

    if x.right == null:
        return x.parent
    else:
        x=x.right
        while x.left != null:
            x=x.left
        return x
```

3. We nemen aan dat de tijden van de patienten in een array p zitten (gevuld van $p[1]$ tot en met $p[n]$, dus met lengte $n + 1$). We nemen aan dat de globale variabele *infinity* een zeer groot getal bevat. Het algoritme om matrix O te vullen, en uiteindelijk de waarde $O(1, T)$ op te leveren:

```
def arts(k,T):

    if T=0: return 0

    n=len(p)-1
    O=[[0 for t in ran(T+1)] for i in ran(n+2)]

    for t in ran(1,T+1): O[n+1][t]=infinity

    for i in ran(n,0):
        for t in ran(T+1):
            if p[i]>=t:
                O[i][t]=min(p[i]-t,O[i+1][t])
            else:
                O[i][t]=min(O[i+1][t-p[i]],O[i+1][t])
```

```
return O[1][T]
```

Antwoorden: Discrete Mathematics

4. Bekijk $1 = 8 - 7 = 2(as + bt) - (ax + by) = (2s - x)a + (2t - y)b$, dan bestaan er dus coëfficiënten $\alpha = (2s-x) \in \mathbb{Z}$ en $\beta = (2t - y) \in \mathbb{Z}$ zodat $\alpha a + \beta b = 1$. Dus $\gcd(a, b) = \min\{\alpha a + \beta b > 0 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\} = 1$, dus a en b zijn relatief priem.

5. (a) Het karakteristieke polynoom van de bijhorende homogene recurrente betrekking is $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. De enige wortel hiervan is $x = 5$. Dus de algemene oplossing van de homogene recurrente betrekking is
$$a_n^{(h)} = c_1 5^n + c_2 n 5^n \,.$$
Als particuliere oplossing kiezen wij
$$a_n^{(p)} = An + B \,,$$
omdat de inhomogene term lineair is. Inzetten in de inhomogene recurrente betrekking levert $An + B - 10A(n-1) - 10B + 25A(n-2) + 25B = 16n + 8$ voor alle n, dus $An(1 - 10 + 25) + A(10 - 50) + B(1 - 10 + 25) = 16n + 8$ voor alle n, dus $A = 1$ en $B = 3$, en de algemene oplossing voor de inhomogene recurrente betrekking is
$$a_n = c_1 5^n + c_2 n 5^n + n + 3 \,.$$
Nu hebben we $a_0 = 3 = c_1 + 3$, en $a_1 = 12 = 5c_1 + 5c_2 + 4$. Hieruit volgt dat $c_1 = 0$ en $c_2 = \frac{8}{5}$, en het antwoord is, voor $n \geq 1$,
$$a_n = 8n5^{n-1} + n + 3 \,.$$
(b) $a_1 = 2$ (voor $0, 2$) en $a_2 = 5$ (voor $00, 02, 20, 22, 11$). Verder hebben we
$$a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 \,.$$
En aangezien $a_n^0 = a_n^2 = a_{n-1}$ en $a_n^1 = 3^{n-1} - a_{n-1}$ is, krijgen we als recurrente betrekking, voor $n \geq 2$
$$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1} \,.$$

6. (a) Neem $G = K_{3,3} + \{v\}$ en verbind v met een willekeurige punt van $K_{3,3}$. Dan is deze graaf niet planair, want hij bevat een $K_{3,3}$ als deelgraaf, maar $m = 10$, $n = 7$, dus $m \leq 2n - 4$. Dus deze graaf is een tegenvoorbeeld.
(b) Bewijs: Neem een willekeurige planaire tekening van G. Merk op dat, als we in een gesloten trail langs de "grens" van een willekeurig gebied lopen, dat we minstens 4 lijnen moeten aflopen, want er bestaan geen cycles van oneven lengte, dus elke cycle heeft lengte minstens 4 (merk op dat K_2 hier een tegenvoorbeeld zou zijn, daarom hebben we $m > 1$ aangenomen). Laat f_i de aantal lijnen zijn die we aflopen langs de grens van gebied i. We concluderen $2m = \sum_{i=1}^{r} f_i \geq 4r$, met r = aantal gebieden van G. Nu geldt de Euler formule voor G, dus
$$n - m + r = 2 \,.$$
Dus $r \leq \frac{1}{2}m$, en daarom $2 = n - m + r \leq n - m + \frac{1}{2}m = n - \frac{1}{2}m$. Dus $m \leq 2m - 4$.

7. We berekenen eerst de aantal mogelijkheden waarbij een vaste persoon, zeg 1, hooguit 15 krijgt. Dat is gegeven door de coefficient van x^{50} van de genererende functie
$$f(x) = (x^{10} + x^{11} + \cdots)^2 (x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{15}) = x^{30} \frac{1 - x^6}{(1-x)^3} \,.$$

Dat is dus de coefficient van x^{20} van

$$\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{x^6}{(1-x)^3}\,.$$

Dus dat is $\binom{-3}{20} - \binom{-3}{14} = \binom{22}{20} - \binom{16}{14} = 111$. Het antwoord is dus $3 \cdot 111 = 333$.

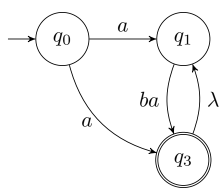
8. (a) Neen een driehoek met lijn lengtes $1, 1, 2$. Dat is een tegenvoorbeeld.

   (b) Laat $D(s)$ de verzameling lijnen zijn uit $\delta(s)$ met de laagste kosten. Dan geldt dat $D(s) \subseteq D_s$, want $d_e \geq 0$ voor alle $e \in E$. Vanwege de 'cut condition' voor kortste paden moet verder minimaal een lijn $e \in D(s)$ bestaan zodat $e \in T$.

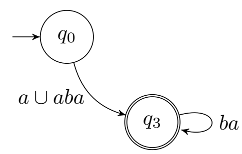
Antwoorden: Languages & Machines

9. (a) **Methode 1:**

Eerst knoop q_2 elimineren:



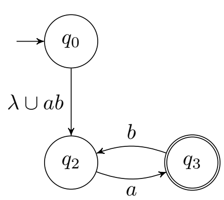
Dan knoop q_1 elimineren:



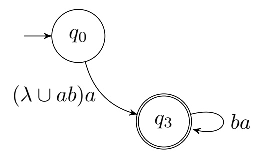
Expressie aflezen: $(a \cup aba)(ba)^*$. Eventueel versimpelen tot: $a(ba)^*$.

Methode 2:

Eerst q_1 elimineren:



Dan q_2 elimineren:

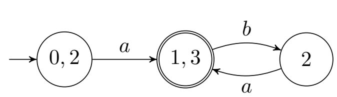


Expressie aflezen: $(\lambda \cup ab)a(ba)^*$. Eventueel versimpelen tot: $a(ba)^*$.

(b) λ-closure and input-transitie tabel:

	λ	a	b
0	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\emptyset$
1	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\emptyset$
3	$\{1,3\}$	$\emptyset$	$\{2\}$

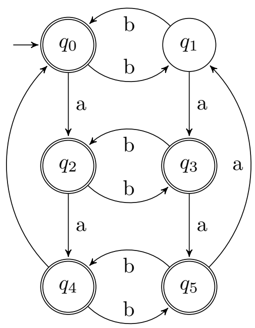
(c) DFA:



10. (a) L_1 is regulier, want $L_1 = \mathcal{L}(E_1)$ voor reguliere expressie: $E_1 = (aaa)a^*$.

(b) L_2 is niet-regulier, bewijs met de pompstelling: Laat $k > 0$ willekeurig gegeven zijn, kies $z = a^k b^{k+1}$, dan $|z| \geq k$ en $z \in L_2$ (want $k < k+1$). Laat u, v, w willekeurig gegeven zijn, zodanig dat $z = uvw$, $|uv| \leq k$ en $|v| > 0$. Dan moet $u = a^m$, $v = a^n$ en $w = a^{k-m-n}b^{k+1}$ zijn voor zekere $m \geq 0$ en $n > 0$. Kies $i = 2$, dan $uv^iw = a^{k+n}b^{k+1} \notin L_2$, want $n \neq 0$, dus $k + n \geq k + 1$. We hebben laten zien dat $\forall k > 0 : \exists z : |z| \geq k \wedge z \in L_2 \wedge \forall u, v, w : |uv| \leq k \wedge |v| > 0 \wedge z = uvw \rightarrow \exists i : uv^iw \notin L_2$. Dus L_2 is niet regulier ("contrapositie" van de pompstelling).

(c) **Methode 1:** Regulier, want $L_3 = \mathcal{L}(M_3)$, waarbij M_3 de volgende DFA is. Merk op dat alleen q_1 niet accepterend is, want woorden naar q_1 hebben wel een drievoud aan a's maar geen tweevoud aan b's.



Methode 2: L_3 bestaat uit de woorden die *geen* drievoud aan a's bevatten, of *wel* een even aantal b's bevatten ($(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$). Dus L_3 kan worden geschreven als:

$$L_3 = \overline{(b^*ab^*ab^*a)^*b^*} \cup (a^*ba^*b)^*a^*)$$

Een alternatieve definitie die gebruik van parallelle compositie:

$$L_3 = \overline{((aaa)^*||b^*)} \cup ((bb)^*||a^*)$$

Omdat reguliere talen gesloten zijn onder complement en parallelle compositie, is L_3 ook regulier.

(d) Stel dat $L_5 - L_4$ regulier is. Iedere eindige taal is regulier; L_4 is eindig, dus is ook $L_4 \cap L_5$ eindig, en dus ook regulier. Reguliere talen zijn gesloten onder vereniging, dus dan is ook $L_5 = (L_5 - L_4) \cup (L_4 \cap L_5)$ regulier. Dit is een tegenspraak met het gegeven dat L_5 niet regulier is. Dus $L_5 - L_4$ is ook niet regulier.