Kenmerk : TW97/T-adam-ao/uitw/dd
Datum : 18 september 2000

Uitwerking

Vak : **Calculus 1 voor WB,CT,TN en TW**

Vakcode : 152026

Datum : 6 oktober 1997

1. Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ alle $n \geq 1$.

   Bewijs:

   (i) $\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2$ en $(1-1)2^2 + 2 = 2$
   dus bewering is juist voor $n = 1$.

   (ii) Stel $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ dan aan te tonen:
   $\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = n2^{n+2} + 2$.
   Welnu:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} = \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = \\ &= 2 + 2^{n+1}((n-1) + (n+1)) = \\ &= 2 + 2^{n+1}2n = 2 + n2^{n=2} \end{aligned}$$

   Uit (i) en (ii) volgt dat de bewering juist is voor alle $n \geq 1$.

2. (a) Als $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ voor alle $x \in V$ met V omgeving van a, en als $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en $\lim_{x\to a} h(x) = L$ dan geldt ook $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

   (b) f is begrensd, dus er is een $M \in \mathbb{R}^+$ met $-M \leqq f(x) \leqq M$ alle $x \in \mathbb{R}$
   $g(x) = (x-1)f(x)$, Er geldt: $0 \leqq |g(x)| = |x-1||f(x)| \leqq |x-1|M$
   $\lim_{x\to 1} |g(x)| = 0$ want $\lim_{x\to 1} |x-1|M = 0$ en $\lim_{x\to 1} 0 = 0$ (gebruik insluitstelling)
   Dus ook $\lim_{x\to 1} g(x) = 0 = g(1)$ dus g is continu in 1.

   (c) g is differentieerbaar in 1 als geldt: $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ bestaat
   $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{(x-1)f(x)-0}{x-1} = f(x)$.
   g is alleen differentieerbaar in 1 als $\lim_{x\to 1} f(x)$ bestaat.

3. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2\cos^4 x + 6\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x} & f^{(3)}(0) &= 2 \\ &= \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{16\sin x\cos^2 x + 24\sin^3 x}{\cos^5 x}$$
$$f^{(4)} = 0$$
$$\tan x = x + \tfrac{2}{3!}x^3 + \sigma(x^4)$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\tan x - x\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \dfrac{x^3}{3} + \sigma(x^4) - x(1+\tfrac{1}{2}x^2 + \sigma(x^3))}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \tfrac{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^3 + \sigma(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \sigma(x) = -\tfrac{1}{6}$$

4. (a)

$$\int \tfrac{x^3-8x-8}{x^3+2x^2+2x}dx = \int \tfrac{x^3+2x^2+2x-10x-8-2x^2}{x^3+2x^2+2x}dx =$$
$$= \int 1 - \tfrac{2x^2+10x+8}{x(x^2+2x+2)}dx = x - 2\int \tfrac{x^2+5x+4}{x(x^2+2x+2)}dx$$
$$\int \tfrac{x^2+5x+4}{x(x^2+2x+2)}dx = \int \tfrac{2}{x} + \tfrac{-x+1}{x^2+2x+2}dx =$$
$$= 2\ln x + \int \tfrac{-\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+2}dx = 2\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\int \tfrac{1}{x^2+2x+2}dx$$
$$\int \tfrac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \tfrac{1}{(x+1)^2+1}dx =$$
$$= \int \tfrac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + c = \arctan(x+1) + c$$

Gebruikte Breuksplitsing:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+5x+4}{x(x^2+2x+2)}$$
$$A(x^2+2x+2) + Bx^2 + Cx = x^2+5x+4$$
$$\begin{cases} A+B = 1 \\ 2A+C = 5 \\ 2A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Gevraagde primitieve:

$$x - 2(2\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)) + c =$$
$$x - 4\ln x + \ln(x^2+2x+2) - 4\arctan(x+1) + c.$$

(b)

$$\int_1^\infty \tfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \tfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$$
$$\int \tfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = -\tfrac{1}{x}\ln(1+x^2) + \int \tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{2x}{1+x^2}dx =$$
$$= -\tfrac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x + c$$
$$\int_1^\infty \tfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\left[-\tfrac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x\right]_1^a =$$
$$= \lim_{a\to\infty} -\tfrac{\ln(1+a^2)}{a} + 2\arctan a + \tfrac{\ln 2}{1} - \arctan 1 =$$
$$= \pi + \ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2} + \ln 2$$

want
$\lim_{a\to\infty} \frac{\ln(1+a^2)}{a} = 0$ omdat
$0 \leqq \frac{\ln(1+a^2)}{a} \leqq \frac{\ln a^3}{a} = \frac{3\ln a}{a}$ en $\lim_{a\to\infty} \frac{3\ln a}{a} = 0$
(standaard limiet).

5. $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2}$ als $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; $f(\mathbf{0}) = 0$

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{x_1\to 0} \frac{f(x_1,0) - f(0,0)}{x_1 - 0} = \lim_{x_1\to 0} \frac{x_1}{x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{x_2\to 0} \frac{f(0,x_2) - f(0,0)}{x_2 - 0} = \lim_{x_2\to 0} \frac{x_2^2}{x_2} = 0$$

(b) partiële afgeleiden geven $D_{\mathbf{0}}f$ als f differentieerbaar is in $\mathbf{0}$:

$$(D_0 f)(\mathbf{h}) = h_1$$

Dus als f differentieerbaar in $\mathbf{0}$ dan $r(\mathbf{h}) = f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - h_1$.

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{h_1^3+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$= \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{p^3\cos^3\varphi+\rho^4\sin^4\varphi}{\rho^3} - \frac{\rho\cos\varphi}{\rho} = \lim_{\rho\downarrow 0} \cos^3\varphi + \rho\sin^4\varphi - \cos\varphi$$

is afhankelijk van φ dus limiet bestaat niet.
Conclusie: f is niet differentieerbaar in $\mathbf{0}$.