Vak	:	Calculus 1 voor TW
Vakcode	:	191521000
Datum	:	29 Oktober 2010
Tijd	:	8:45 - 11:45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
In totaal 6 opgaven, zie ook ommezijde.

.

1. (a) Bepaal de waarde van het getal α zodat de volgende functie continu is in het punt $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{voor} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{voor} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Beschouw een functie $x \to g(x)$ die differentieerbaar is met continue afgeleide. Stel de vergelijking $y = r(x)$ op van de raaklijn aan de grafiek van de functie in het punt $(a, g(a))$. Bewijs dan dat

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - r(x)}{x - a} = 0.$$

2. Beschouw de volgende functie f van twee variabelen voor $x \in \mathbb{R}$ en $t > 0$:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/t}.$$

(a) Bereken de partiele afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial t}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en laat zien dat

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

(b) Onderzoek voor elke $x \in \mathbb{R}$ de limiet

$$\lim_{t \downarrow 0} f(x,t).$$

(c) Bepaal de waarde van de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, dx.$$

[Aanwijzing: u moet gebruik maken van het feit dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad .]$$

3. Bereken de volgende bepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}} dx$

4. Onderzoek of de integraal convergent of divergent is in de volgende gevallen:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{x-\pi/2}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x-1)^2}dx$

   [Aanwijzing: probeer niet primitieven te vinden.]

5. Beschouw de functie f op het interval $[0,2]$ gegeven door

   $$f(x) = x^2(3-x).$$

   (a) Toon aan dat f een monotoon stijgende functie is en schets de grafiek van f .

   (b) Laat g de inverse zijn van de functie f in onderdeel (a). Bepaal het domein (definitiegebied) van de functie g en schets de grafiek van g op dat domein.

   (c) Bereken $g(2)$ en bereken de afgeleide van g in het punt 2, dus $g'(2)$.

6. Bepaal de oplossing $x(t)$ van de volgende differentiaalvergelijking

   $$\ddot{x} + \dot{x} + x = 3\sin(t) + \exp(-t)$$

   waarvoor geldt dat $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 1$.

Puntenverdeling:

1	a	3	2	a	2	3	a	2	4	a	3	5	a	3	6	5
	b	3		b	3		b	2		b	3		b	2		
				c	2								c	3		

Totaal = 36+4=40 punten