

Vak : Calculus & Calculus 1 voor TW
Vakcode : 201100103 & 201000174
Datum : 4 November 2011
Tijd : 8:45 - 11:45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

In totaal 6 opgaven, zie ook ommezijde.

Het aantal punten behaald voor opgave 1 (maximaal 8) zal vervangen worden door de som van de twee toetsresultaten indien dat groter is.

1. (a) Geef voor een rij getallen $\{x_n\}$ de definitie van $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.
(b) Geef de 'epsilon-delta' definitie van continuïteit van een functie $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ in het punt $(x, y) = (a, b)$.
(c) Bepaal de waarde van de volgende integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 9}$$

- (d) Bepaal de volgende limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 \ln(x+2)}{\cos x - 1}$$

2. (a) Interpreteer de volgende som als een Riemann som, en bereken de limiet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \sin\left(\frac{2k}{N}\right)$$

- (b) Bereken

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$$

3. Beschouw een functie $x \rightarrow g(x)$ die differentieerbaar is met continue afgeleide.

- (a) Geef de vergelijking van de rechte lijn $y = \ell(x)$ door het punt $(a, g(a))$ met gegeven richtingscoëfficiënt r . Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - \ell(x)) = 0$.
(b) Ga na dat er een waarde van de richtingscoëfficiënt r is, en bepaal die waarde, waarvoor geldt dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(x) - \ell(x)}{x - a} \right) = 0.$$

- (c) Beschouw het speciale geval $g(x) = x^2$, en $a = 1$. Bepaal de waarde van r waarvoor de eigenschap in (b) geldt.

4. (a) Bereken de volgende bepaalde integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

- (b) Onderzoek of de volgende integraal convergent of divergent is:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x-\pi} dx$$

5. Met het complexe getal $z_k = x_k + iy_k$ associëren we de vector $\mathbf{v}_k = (x_k, y_k)$.

- (a) Toon aan dat voor het inproduct van twee vectoren $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ geldt dat

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

(Hier is $\overline{z_2}$ de complex geconjugeerde van z_2 .)

- (b) Toon aan dat voor $\mathbf{v} = (x, y)$ met $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ geldt dat

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \theta$$

waarin θ de hoek is tussen de vectoren $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$.

[Aanwijzing: U kunt gebruik maken van onderdeel a.]

- (c) Geef de oplossingen voor $z \in \mathbb{C}$ van de vergelijking

$$z^3 = 1 + i$$

6. (a) Bepaal de gewone differentiaalvergelijking voor $a(t)$ zodat $u = a(t) \sin(x)$ een oplossing is van de partiele differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

- (b) Bepaal de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking voor een functie y die voldoet aan de gegeven beginvoorwaarden

$$\ddot{y} - y = t + e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Puntenverdeling:

1	a	2	2	a	3	3	a	1	4	a	3	5	a	2	6	a	2
	b	2		b	3		b	2		b	3		b	2		b	4
	c	2					c	1					c	2			
	d	2															

Totaal = 36+4=40 punten