

Toets Stochastic Models (theorie)

Woensdag 20 mei 2015, 8.45 – 11.45 uur

Onderdeel vande volgende Bachelor (tweedejaars) modules:

Modelling and analysis of stochastic processes for MATH (201400434)

Modelling and analysis of stochastic processes for IEM (201400062)

Coordinator: W.R.W. Scheinhardt

Docenten: W.R.W. Scheinhardt, R.J. Boucherie, J.T. Timmer

- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven
- Boeken, aantekeningen, etc. zijn NIET toegestaan
- Gewone rekenmachine is toegestaan, maar GEEN grafische rekenmachine
- Zet naam en studentnummer op ieder vel dat u inlevert
- Puntenverdeling staat onderaan
- Motiveer alle antwoorden

Opgave 1

Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ per minuut bij een wachtsysteem met 2 wachtplaatsen en één server. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde μ^{-1} minuten. Als de server werkt is deze onderhevig aan stochastische uitval volgens een Poissonproces met intensiteit α per minuut. Als de server uitvalt, wordt deze onmiddellijk gerepareerd. De reparatieduren zijn exponentieel verdeeld met gemiddelde β^{-1} minuten. Na reparatie functioneert de server weer als "nieuw" en begint weer met de bediening die op moment van uitval onderhanden was. Een klant die het systeem vol aantreft gaat verloren. Alle onderliggende stochastische variabelen zijn onderling onafhankelijk.

- a) Bepaal de kans dat er binnen 1 minuut meer dan 1 klant aankomt.
- b) Bepaal het verwachte aankomsttijdstip van de tweede klant na 10.00 uur, als bekend is dat er tussen 10.00 en 10.01 uur geen klanten arriveren.
- c) Beschrijf het toestandsproces met zijn toestanden (bedenk dat zowel het aantal klanten in het systeem als de toestand van de server in de toestandsbeschrijving opgenomen moeten worden) d.m.v. een transitiediagram.
- d) Geef de balansvergelijkingen voor de evenwichtskansen (oplossen hoeft niet).

De antwoorden op de volgende vragen moeten uitgedrukt worden in de gegeven parameters en de evenwichtskansen.

- e) Hoe groot zijn de binnenkomst- en vertrekintensiteit? (Met andere woorden: hoeveel klanten komen er per minuut binnen, en hoeveel klanten worden er per minuut geholpen?)
- f) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten in het systeem.
- g) Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server bezig is met bedienen?
- h) Wat is de verdeling van de tijd gedurende welke het systeem ononderbroken leeg is?

Opgave 2

Beschouw een bedrijf waarin T-shirts worden gemaakt en gedrukt. We bekijken de afdeling waarin eerst de afbeeldingen op de T-shirts worden gestreken en de T-shirts vervolgens worden verpakt. Deze twee handelingen worden steeds door één en dezelfde medewerker voor één T-shirt achtereenvolgens verricht. Er is één strijkapparaat en één inpakmachine en deze staan beiden in een aparte ruimte. De duur van het strijken en verpakken is exponentieel verdeeld met respectievelijke gemiddelden 6 minuten en 2 minuten. De loopafstand van de ene ruimte naar de andere is verwaarloosbaar. De productieafdeling van het bedrijf is zo ingericht dat de afdeling altijd T-shirts beschikbaar heeft om te bedrukken.

Er is echter wel een probleem op de afdeling. Het strijkapparaat is verouderd. Dit heeft tot gevolg dat de strijkhandeling met kans $p = \frac{1}{2}$ moet worden overgedaan. Er werken m medewerkers op de afdeling.

- Modelleer de afdeling als een gesloten netwerk van wachtrijen.
- Bepaal m.b.v. *Mean Value Analysis* het gemiddelde aantal medewerkers en de gemiddelde verblijftijd in de strijk- en inpakruimte, indien $m = 2$.

Opgave 3

Sjonnie heeft een nieuwe auto besteld bij zijn dealer. Over 4 weken kan hij deze ophalen. Voordat het zover is, wil hij zijn oude auto nog verkopen. Zijn dealer heeft hem er 450 euro voor geboden. Toch wil Sjonnie het eerst proberen via internet veilingen. Elke veiling duurt 1 week. Biedingen komen binnen gedurende de week en blijven de hele week geldig. Het heeft daarom geen zin hier tussentijds op te reageren. Aan het einde van de week is Sjonnie natuurlijk alleen geïnteresseerd in het hoogste bod. Is hij niet tevreden met het hoogste bod, dan heeft hij de mogelijkheid een nieuwe veiling te starten. Sjonnie schat zijn kansen in elke veiling als volgt in:

Hoogste bod	Kans
400	0.4
500	0.3
600	0.2
700	0.1

Zoals gezegd, wil Sjonnie zijn oude auto uiterlijk aan het einde van week 4 verkocht hebben. Hij kan dus maximaal 4 veilingen starten voor zijn oude auto. De kosten van een veiling zijn 25 euro. Deze bestaan uit advertentiekosten, maar ook uit kosten voor het langer houden van de oude auto (verzekering en belasting). Het aanbod van de dealer blijft geldig, Sjonnie kan dus op elk moment terugvallen op het bod van 450 euro.

- Welke keuzes heeft Sjonnie op de verschillende beslismomenten?
- Benoem de fasen n , toestanden i , beslissingen d , en optimale waardefunctie $f_n(i)$ behorende bij dit stochastische dynamische programmeringsprobleem.
- Geef de recurrente betrekking (recursie) voor de optimale waardefunctie.
- Bepaal de optimale politiek (strategie) door het opstellen van een "policy table" (beslissingen voor elke fase en toestand). Wat is de maximale verwachte opbrengst voor Sjonnie's oude auto?

Opgave 4

Iedere dag bezit u 0 of 1 aandeel van een fonds. De dagprijs (in euro's) voor dit aandeel is een stochastische proces dat gemodelleerd wordt door een Markov keten met overgangskansen zoals in de tabel hieronder.

		Dag $n+1$	
		100	200
Dag n	100	0.50	0.50
	200	0.25	0.75

- Als de dagprijs vandaag 100 euro bedraagt, wat is dan de kans dat dit overmorgen ook het geval is?
- Bepaal de fractie van de dagen (op de lange termijn) dat de dagprijs 100 euro bedraagt.

Aan het begin van een dag waarop u een aandeel bezit kunt u kiezen tussen verkopen tegen de geldende dagprijs, of behouden. Als u aan het begin van een dag geen aandeel bezit, kunt u kiezen tussen het kopen van een aandeel tegen de geldende prijs of niet kopen. U heeft een startkapitaal van 200 euro. Uw doel is de verwachte contante waarde van de winst te maximaliseren over een oneindige horizon, bij een disconteringsfactor (op dagbasis) van 0.8.

- Definieer de toestanden, en geef per toestand de mogelijke beslissingen.
- Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen.
- Voer twee iteraties uit van het waarde-iteratie algoritme.
- Formuleer een L.P.-model waarmee dit probleem opgelost kan worden. Beschrijf hoe uit de oplossing van dit L.P.-model de optimale politiek (strategie) gevonden wordt.
- Hoeveel stationaire politieken zijn er? (Verklaar uw antwoord door gebruik te maken van de definitie van een stationaire politiek.)

Puntenverdeling:

1(24 ptn)								2(21ptn)		3(20ptn)				4(25ptn)							Tot
a	b	c	d	e	f	g	h	a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	g	
3	3	5	4	2	2	2	3	8	13	3	4	3	10	3	3	3	3	5	5	3	90

$$\text{Cijfer} = \text{Totaal}/10 + 1$$