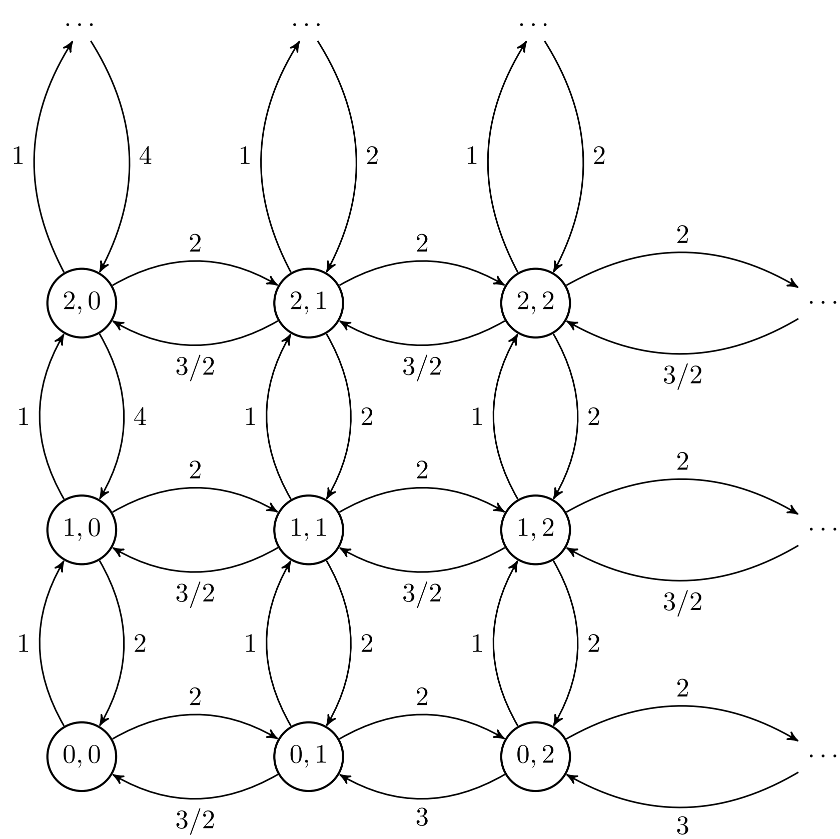
Opgave 1

a) Ja, de bedieningsduur is exponentieel verdeeld dus vanwege geheugenloosheid is er geen verschil of een bediening op een zeker moment opnieuw start of gewoon doorgaat.

b) Zij X en Y de resterende bedieningstijden van, respectievelijk, een heer en een dame, dan is $Z = min(X, Y)$ de gevraagde kansverdeling.

$X \sim exp(2)$ en $Y \sim exp(3/2)$ vanwege geheugenloosheid. Het minimum van 2 onderling onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten is exponentieel verdeeld met parameter de som van de beide parameters, $Z \sim exp(7/2)$.

c) Neem als toestanden (h, d) het aantal (heren,dames). Het transitiediagram is:



Neem als kansverdeling $P(h,d)$ de kans op h heren en d dames. De balansvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}
3P(0,0) &= 3/2P(0,1) + 2P(1,0) && \\
9/2P(0,1) &= 2P(0,0) + 3P(0,2) + 2P(1,1) && \\
6P(0,d) &= 2P(0,d-1) + 3P(0,d+1) + 2P(1,d) && d \geq 2 \\
5P(1,0) &= P(0,0) + 3/2P(1,1) + 4P(2,0) && \\
7P(h,0) &= P(h-1,0) + 4P(h+1,0) + 3/2P(h,1) && h \geq 2 \\
13/2P(h,d) &= P(h-1,d) + 2P(h,d-1) + 2P(h+1,d) + 3/2P(h,d+1) && h,d \geq 1
\end{aligned}$$

aangevuld met de vergelijking voor normering:

$$\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty} P(h,d) = 1$$

d) Beide robots kunnen zowel dames als heren bedienen. De totale hoeveelheid werk die per uur verwerkt kan worden is dus 2 uur indien er minimaal 2 klanten aanwezig zijn. De bedieningsduur van bediening door de robot wordt bepaald door de klant de ze bedienen. We onderscheiden 3 gevallen. (1) $h,d \geq 1$ Per uur komt er 1/2 uur werk van heren en 4/3 uur werk van dames binnen. De totale hoeveelheid werk die per uur binnenkomt $((1/2) + (4/3) = 11/6$ uur) is dus minder dan de hoeveelheid werk die verwerkt kan worden. (2) $h = 0$ Indien er minimaal 2 dames aanwezig zijn is de vertrekintensiteit van dames 3 per uur en de aankomstintensiteit 2 per uur. (3) $d = 0$ Indien er minimaal 2 heren aanwezig zijn is de vertrekintensiteit van heren 4 per uur en de aankomstintensiteit 1 per uur. In alle gevallen is de vertrekintensiteit groter dan de aankomstintensiteit. Het systeem is dus stabiel.

e) De kans dat er h heren in het systeem zijn is $\sum_{d=0}^{\infty} P(h,d)$. Het gemiddeld aantal heren in het systeem is dus:

$$E(\#\text{ Heren}) = \sum_{h=0}^{\infty} h \sum_{d=0}^{\infty} P(h,d)$$

Indien er h heren in het systeem zijn en minimaal 1 dame wachten er $h-1$ in de rij en indien er geen dames zijn dan wachten er $h-2$ in de rij. Het gemiddeld aantal heren in de rij is dus:

$$E(\#\text{ Heren in de rij}) = \sum_{h=1}^{\infty}(h-1)\sum_{d=1}^{\infty} P(h,d) + \sum_{h=2}^{\infty}(h-2)P(h,0)$$

f) Robot M.An is niet aan het werk in de toestanden $(0,0)$ en $(0,1)$. Dus de fractie van de tijd dat M.An aan het werk is, is $1 - P(0,0) - P(0,1)$.

Robot V.Rouw is niet aan het werk in de toestanden $(0,0)$ en $(1,0)$. Dus de fractie van de tijd dat V.Rouw aan het werk is, is $1 - P(0,0) - P(1,0)$.

g) Alleen in toestand (0,0) zijn beide robots niet aan het werk. Het aankomstproces van heren en dames is Poisson. De tijd tussen aankomsten van heren en dames is dus exponentieel verdeeld met rates 1 en 2. Vanwege geheugenloosheid van de exponentiële verdeling is op het moment dat beide robots niets meer te doen hebben de resterende tijd tot volgende aankomst van een heer dus ook expontieel verdeeld met rate 1 en evenzo voor dame met rate 2. De gemiddelde tijd in deze toestand is de verwachtingswaarde van het minimum van 2 onafhankelijke exponentiële verdelingen met rates 1 en 2. Dit is dus $\frac{1}{1+2}$uur = 20 minuten.

Opgave 2

a) De balansvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_4 \\
\pi_2 &= \pi_1 \\
\pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 \\
\pi_4 &= \pi_3
\end{aligned}$$

aangevuld met de vergelijking voor normering:

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

Uitdrukken van de π_i in π_1 geeft $\pi_2 = \pi_1$ en $\pi_3 = \pi_4 = 3/4\pi_2 = 3/4\pi_1$. Invullen in de vergelijking voor normering geeft dan:
$\pi_1 = \frac{4}{14}$, $\pi_2 = \frac{4}{14}$, $\pi_3 = \frac{3}{14}$ en $\pi_4 = \frac{3}{14}$.

b) De "mean first passage time" voor toestand i naar zichzelf wordt gegeven door $m_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$. Dus het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 1 opnieuw te bereiken is $m_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{14}{4}$.

c) $\rho_i = \frac{\pi_i}{\mu_i}$. De simultane kans dat er in het systeem met m klanten (n_1, n_2, n_3, n_4) klanten bij de verschillende stations zijn is:

$$P_m(n_1,n_2,n_3,n_4) = \begin{cases} C_m \left(\frac{16}{14}\right)^{n_1} \left(\frac{12}{14}\right)^{n_2} \left(\frac{6}{14}\right)^{n_3} \left(\frac{3}{14}\right)^{n_4} & n_1+n_2+n_3+n_4 = m \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Hierin is C_m de normeringsconstante:

$$C_m = \left\{ \sum_{n_1,n_2,n_3,n_4:n_1+n_2+n_3+n_4=m} \left(\frac{16}{14}\right)^{n_1} \left(\frac{12}{14}\right)^{n_2} \left(\frac{6}{14}\right)^{n_3} \left(\frac{3}{14}\right)^{n_4} \right\}^{-1}$$

NB: Door veel studenten is in plaats van bovenstaande formule voor C_m onderstaand antwoord gegeven. Dit is ook goed gerekend.
Deze kan worden berekend met behulp van Buzens algoritme. De startwaardes zijn $G_i(0) = 1$ en $G_1(k) = \rho_1^k$. Volgende waardes kunnen berekend worden met: $G_i(k) = G_{i-1}(k) + \rho_i G_i(k-1)$. Omdat er 4 stations zijn en m klanten is $C_m = (G_4(m))^{-1}$.

d) Volgens de Aankomststelling geldt dat een klant die aankomt bij een station in een gesloten netwerk met $m = 2$ klanten de evenwichtsverdeling "ziet" van het netwerk met $m = 1$ klanten. De gevraagde simultane verdeling is dus simultane kansverdeling met $m = 1$ uit antwoord **c)**.

e) (m=1) $F_1(i) = 1/\mu_i$, dus $F_1(1) = 4$, $F_1(2) = 3$, $F_1(3) = 2$ en $F_1(4) = 1$.

$1 = m = \sum L_1(i) = \lambda_1 \sum \pi_i F_1(i) = \lambda \frac{37}{14}$, dus $\lambda_1 = 14/37$.

$\lambda_1(i) = \lambda_1 \pi_i$, dus $\lambda_1(1) = 4/37$, $\lambda_1(2) = 4/37$, $\lambda_1(3) = 3/37$ en $\lambda_1(4) = 3/37$.

Hier volgt het gemiddelde aantal klanten bij station i uit: $L_1(i) = \lambda_1(i)F_1(i)$, dus $L_1(1) = 16/37$, $L_1(2) = 12/37$, $L_1(3) = 6/37$ en $L_1(4) = 3/37$.
De gemiddelde verblijftijd bij station i is $F_1(i)$.

(m=2) $F_2(i) = (1 + L_1(i))/\mu_i$, dus $F_2(1) = 212/37$, $F_2(2) = 147/37$, $F_2(3) = 86/37$ en $F_2(4) = 40/37$.

$2 = m = \sum L_2(i) = \lambda_2 \sum \pi_i F_2(i) = \lambda \frac{1814}{518}$, dus $\lambda_2 = 518/907$.

$\lambda_2(i) = \lambda_2 \pi_i$, dus $\lambda_2(1) = 148/907$, $\lambda_2(2) = 148/907$, $\lambda_2(3) = 111/907$ en $\lambda_2(4) = 111/907$.

Hier volgt het gemiddelde aantal klanten bij station i uit: $L_2(i) = \lambda_2(i)F_2(i)$, dus $L_2(1) = 848/907$, $L_2(2) = 588/907$, $L_2(3) = 344/907$ en $L_2(4) = 160/907$.
De gemiddelde verblijftijd bij station i is $F_2(i)$.

f) Om van station 1 weer naar station 1 te gaan zal de klant door stations 1 en 2 moeten en mogelijk l door stations 3 en 4. Het aantal cykels door station 3 en 4 is geometrisch met een gemiddelde van 3/2. De kans dat er cycels door

3 en 4 zijn is 1/2. De verwachte tijd tot terugkeer is dus:

$$\begin{aligned}
E(\text{tijd tot terugkeer}) &= (F_2(1) + F_2(2)) + (1/2) * (3/2) * (F_2(3) + F_2(4)) \\
&= \frac{212}{37} + \frac{147}{37} + \frac{3}{4}(\frac{86}{37} + \frac{40}{37}) \\
&= \frac{907}{74}
\end{aligned}$$

UNIVERSITEIT TWENTE.

Invullen in blokletters/To be completed by student

Cursusnaam/*Coursename*: Stochastic Models		Datum/*Date*: 22-5-2017	Bladnr./*Page no.*
Cursuscode/*Coursecode*			
Studentnr./*Student no.*	Voorl./*Initials*	Opleiding/*Programme*	Groepnr./*Group no.*
Naam/*Name*: opgaven 3 & 4			

opgave 3

(a) Fasen: $n \in \{1, 2, 3\}$ periode voorafgaand aan n^e damspel

Toestanden: $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ aantal punten A. Zwart aan begin van een fase

Actie: $d \in \{a, v\}$ aanvallend of verdedigend dammen

Waardefunctie $f_n(i)$: maximale winstkans voor A. Zwart als hij in fase n start met i punten.

(b) Recurrente betrekkingen:

Er wordt alleen een derde partij gespeeld bij gelijke stand na 2 partijen. Dat wil zeggen, als elk 1 punt heeft na 2 partijen, dus aan begin van fase 3.

$f_3(1) = \max\{0.40, 0\}$ (resp. a, v)

Na 1spel $0, \frac{1}{2}$ of 1 punt:

$f_2(1) = \max\{0.4 + 0.6 f_3(1), 0.8 + 0.2 f_3(1)\}$

$f_2(\frac{1}{2}) = \max\{0.4, 0.8 f_3(1)\}$

$f_2(0) = \max\{0.4 f_3(1), 0\}$

Voor de eerste partij zijn er geen punten:

$f_1(0) = \max\{0.4 f_2(1) + 0.6 f_2(0), 0.8 f_2(\frac{1}{2}) + 0.2 f_2(0)\}$.

(c) Oplossen van de recurrente betrekkingen van (b):

$f_3(1) = 0.4$ (beste actie: a)

$f_2(1) = \max\{0.4 + 0.6 \cdot 0.4, 0.8 + 0.2 \cdot 0.4\}$
$= \max\{0.64, 0.88\} = 0.88$ (v)

$f_2(\frac{1}{2}) = \max\{0.4, 0.8 \cdot 0.4\} = 0.4$ (a)

$f_2(0) = \max\{0.4 \cdot 0.4, 0\} = 0.16$ (a)

$f_1(0) = \max\{0.4 \cdot 0.88 + 0.6 \cdot 0.16,\ 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.16\}$
$= \max\{0.448, 0.352\} = 0.448$ (a)

De optimale winstkans is 44,8 %.

(d) 'Policy table':

	toestand		
fase	1	$\frac{1}{2}$	0
1	–	–	a
2	V	a	a
3	a	–	–

Dit volgt uit de berekeningen van (c).

opgave 4

(a) toestanden: G = goede, S = slechte verkopen vorige maand

besluit: V = veel reclame, W = weinig reclame

directe opbrengsten:

$r(G,V) = (0.90 \cdot 40 + 0.10 \cdot 30) \cdot 200 = 7800$

net zo berekend: $r(G,W) = 7770$, $r(S,V) = 6800$, $r(S,W) = 6930$.

overgangskansen $p(j|i,d)$: zie tabellen in de opgave.

(b) $V(i)$: maximaal verwachte verdisconteerde winst als het systeem start in toestand i.

$$V(G) = \max \begin{cases} 7800 + 0.9\,(0.9\,V(G) + 0.1\,V(S)) & \text{(actie V)} \\ 7770 + 0.9\,(0.7\,V(G) + 0.3\,V(S)) & \text{(W)} \end{cases}$$

$$V(S) = \max \begin{cases} 6800 + 0.9\,(0.4\,V(G) + 0.6\,V(S)) & \text{(V)} \\ 6930 + 0.9\,(0.3\,V(G) + 0.7\,V(S)) & \text{(W)} \end{cases}$$

Dit zijn de optimaliteitsvergelijkingen.

(c) $V_0(G) = 0$, $V_0(S) = 0$

waarde-iteratie:

$V_1(G) = \max\{7800, 7770\} = 7800$ (actie V)

$V_1(S) = \max\{6800, 6930\} = 6930$ (W)

$$V_2(G) = \max \begin{cases} 7800 + 0.9\,(0.9 \cdot 7800 + 0.1 \cdot 6930) \\ 7770 + 0.9\,(0.7 \cdot 7800 + 0.3 \cdot 6930) \end{cases}$$

$= \max\{14741.7, 14555.1\} = 14741.7$ (V)

$$V_2(S) = \max \begin{cases} 6800 + 0.9(0.4 \cdot 7800 + 0.6 \cdot 6930) \\ 6930 + 0.9(0.3 \cdot 7800 + 0.7 \cdot 6930) \end{cases}$$

$$= \max\{13350.2,\ 13401.9\} = 13401.9 \quad (W).$$

(d) Politiek is $d(G) = V$, $d(S) = V$, telkens veel reclame.
Gevraagd: V_δ met $\delta = (d, d, d \ldots)$

Oplossen:
$$\begin{cases} V_\delta(G) = 7800 + 0.81\, V_\delta(G) + 0.09\, V_\delta(S) \\ V_\delta(S) = 6800 + 0.36\, V_\delta(G) + 0.54\, V_\delta(S) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.19\, V_\delta(G) = 7800 + 0.09\, V_\delta(S) \\ 0.46\, V_\delta(S) = 6800 + 0.36\, V_\delta(G) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (lineaire algebra) $\begin{pmatrix} 0.19 & -0.09 \\ -0.36 & 0.46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_\delta(G) \\ V_\delta(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7800 \\ 6800 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} V_\delta(G) \\ V_\delta(S) \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}055} \begin{pmatrix} 0.46 & 0.09 \\ 0.36 & 0.19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7800 \\ 6800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76363.64 \\ 74545.45 \end{pmatrix}$$

De verwachte verdisconteerde winst van de politiek is V_δ.

(e) Gebruik de politiek uit onderdeel (d) als initiële politiek in stap 1 van het algoritme.
Doorloop stappen 2 en 3 van het algoritme, d.w.z. voer 1 iteratie uit.
Dan komen we bij stap 4. Als het algoritme hier stopt, dan is de politiek optimaal.
Anders, als het algoritme teruggaat naar stap 2, is de politiek niet optimaal.