Module 2 toets 2 Analyse, 201300057

18-01-2016,

Name + studentnummer:

Motiveer alle antwoorden.

1. Bewijs of weerleg de volgende beweringen:

   (a) (2pt) De functie $f(x) = 2x$ is uniform continu op $\mathbb{R}$.

   (b) (2pt) De functie $f(x) = x^2$ is uniform continu op $\mathbb{R}$.

   (c) (2pt) de functie $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ is uniform continu op $(0, 1]$

2. (6pt) Formuleer de stelling van Rolle en geef het bewijs. [zie boek]

3. Gegeven is dat de functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend is en dat $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ een partitie is van het interval $[a, b]$

   (a) (4pt) Laat zien dat

   $$\sum_{j=1}^{n}(M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j \leq (f(b) - f(a))\,||P||.$$

   (b) (2pt) Bewijs dat iedere monotone functie op het interval $[a, b]$ integreerbaar is.

1a. Kies $\varepsilon > 0$. Met $\delta = \varepsilon/2$: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\delta = \varepsilon$

1b. Als $x_n = n + \frac{1}{n}$ en $y_n = n$ geldt $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$ en $|f(x) - f(y)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$. Kies nu $\varepsilon = 1$. Gegeven δ bestaat $n = n(\delta)$ zo dat $\frac{1}{n} < \delta$. Nu volgt dat $|x_n - y_n| < \delta$ en tevens $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon = 1$. Dus f is niet uniform continu.

1c. $f(x)$ is niet continu uitbreidbaar tot het interval $[0,1]$ aangezien $\lim_{x \downarrow 0} \cos\frac{1}{x}$ niet bestaat. Dus f is niet uniform continu op $(0,1]$ (Stelling 3.40)

3. (a) Aangezien f stijgend is geldt: $M_j(f) = f(x_j)$ en $m_j(f) = f(x_{j-1})$. Verder geldt dat $|\Delta x_j| \leq ||P||$. Er volgt

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))\,||P|| \overset{\text{Telescoop reeks}}{=} (f(b) - f(a))\,||P||$$

(b) Als $||P|| < \varepsilon/(f(b) - f(a))$ geldt dat $U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} (M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j < \varepsilon$. $\Rightarrow$ f is integreerbaar.