MASTERMATH MEETKUNDE DEELTENTAMEN 1

Vrijdag 26 oktober 2018, 14:00 – 17:00 uur

Schrijf uw uitwerkingen overzichtelijk en inclusief onderbouwing op. Het gebruik van elektronische hulpmiddelen zoals rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Schrijf- en tekenhulpmiddelen zoals pen, potlood, passer en liniaal zijn wel toegestaan.
Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten (maximaal 45) 5 punten op te tellen en het resultaat te delen door 5 en af te ronden op één decimaal.

---

1. (**8 p**) In $\triangle ABC$ noteren we $|AB|$ als lengte c en geven we met h_C en z_C de lengtes aan van de hoogtelijn uit C respectievelijk de zwaartelijn uit C. Deze drie lengtes zijn als lijnstuk gegeven, zie bijlage. Construeer hiermee $\triangle ABC$. Beschrijf kort de constructiestappen.

2. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$ en een punt P.

   a) (**2 p**) Geef een definitie van 'P ligt binnen $\triangle ABC$'.

   b) (**6 p**) Neem P binnen $\triangle ABC$. Noteer de loodrechte projecties van P op de drie gelijke zijden met U, V en W. Bewijs

   $$|PU| + |PV| + |PW| = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|AB|.$$

   (Hint: maak gebruik van het begrip oppervlakte.)

3. (**8 p**) Gegeven zijn de cirkels $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ en $C_2 : (x-10)^2 + y^2 = 16$. Er zijn twee gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkels die elkaar snijden in een punt tussen de middelpunten van C_1 en C_2. Bepaal vergelijkingen van deze raaklijnen.

Zie andere zijde

MASTERMATH MEETKUNDE DEELTENTAMEN 1
Vrijdag 26 oktober 2018, 14:00 – 17:00 uur

4. Gegeven is $\triangle ABC$. Bij elke keuze van een oorsprong geven we de met A corresponderende vector aan met $\vec{a}$ enz. Verder is het punt P gegeven dat correspondeert met de vector

$$\vec{p} = \frac{1}{10}(2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}).$$

   a) (**2 p**) Punt F ligt op lijnstuk AB en verdeelt het lijnstuk in de verhouding $3:2$, dus $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{3}{2}$. Bewijs dat de met F corresponderende vector $\vec{f}$ te schrijven is als

$$\frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b}).$$

   b) (**3 p**) Bewijs dat C, P en F op één rechte liggen.

   c) (**3 p**) De lijn AP snijdt BC in D. Bepaal de verhouding $\frac{|BD|}{|DC|}$.

5. In het vlak zijn gegeven de lijn ℓ en het punt A buiten ℓ. Van de isometrie T van het vlak is gegeven dat $T(\ell) = \ell$ (dus T transformeert elk punt van ℓ in een mogelijk ander punt van ℓ) en dat $T(A)$ het spiegelbeeld is van A bij loodrechte spiegeling in ℓ.

   a) (**4 p**) Zij m de lijn door A en loodrecht op ℓ. Bewijs dat T het snijpunt B van ℓ en m vastlaat.

   b) (**4 p**) Bepaal alle mogelijkheden voor de isometrie T.

6. Geef, *zonder toelichting*, op uw antwoordvel aan welke beweringen waar respectievelijk onwaar zijn.
Elk goed antwoord levert **1 punt** op, elk fout antwoord $-$ **1 punt**, een onderdeel zonder antwoord levert **0 punten** op, met dien verstande dat u voor deze opgave altijd in totaal **minimaal 0 punten** haalt (en maximaal 5 punten).

   a) Het regelmatige veelvlak $\{p, q\}$ is opgebouwd uit regelmatige p-hoeken waarvan er in elk hoekpunt q samenkomen. Voor zo'n veelvlak geldt dan dat $qH = pV$ waarin H het aantal hoekpunten en V het aantal zijvlakken is.

   b) In *De Elementen* van Euclides staat beschreven hoe voor elke gehele $n \geq 3$ de regelmatige n-hoek kan worden geconstrueerd.

   c) Gegeven in het vlak drie niet op één lijn gelegen punten A, B en C en een punt D tussen A en B. Het Pasch-axioma uit het Hilbert-stelsel concludeert dat elke lijn door D nog een ander punt (dan D) van $\triangle ABC$ bevat.

   d) Voor elk drietal vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, elk $\neq \vec{0}$, in de ruimte geldt

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|.$$

   e) Voor elke loodrechte spiegeling S in een lijn en elke translatie T over een vector loodrecht op die lijn is de samenstelling $S \circ T$ een loodrechte spiegeling.

Uitwerkingen MASTERMATH MEETKUNDE DEELTENTAMEN 1
Vrijdag 26 oktober 2018, 14:00 – 17:00 uur

Opgaven kunnen in de regel op diverse manieren uitgewerkt worden. Hieronder worden alternatieve aanpakken soms enkel aangestipt.

---

1. (**8 p**) In $\triangle ABC$ noteren we $|AB|$ als lengte c en geven we met h_C en z_C de lengtes aan van de hoogtelijn uit C respectievelijk de zwaartelijn uit C. Deze drie lengtes zijn als lijnstuk gegeven, zie bijlage. Construeer hiermee $\triangle ABC$. Beschrijf kort de constructiestappen.
Antw. Hoekpunt C ligt op afstand z_C van het midden van lijnstuk AB en op afstand h_C van lijn AB.
Construeer het midden van AB, noem dit punt M (gebruik cirkels met middelpunt A resp. B en straal $|AB|$; met deze cirkels vind je ook de middelloodlijn van AB). Teken de cirkel met middelpunt M en straal z_C. Punt C ligt hier op. Pas op de middelloodlijn van AB een lijnstuk ter lengte h_C af. Noem het uiteinde ongelijk M verder D. Construeer lijn ℓ door D en parallel aan AB (constructie loodlijn op MD hiervoor gebruiken). Punt C ligt nu op deze laatste lijn. Laat C een van de snijpunten van de cirkel met ℓ zijn. Dan is $\triangle ABC$ als gevraagd.

2. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$ en een punt P.

   a) (**2 p**) Geef een definitie van 'P ligt binnen $\triangle ABC$'.
   Antw. P ligt binnen elk der hoeken $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$, waarbij P binnen $\angle A$ ligt als $\angle BAP + \angle PAC = \angle BAC$ enz.

   b) (**6 p**) Neem P binnen $\triangle ABC$. Noteer de loodrechte projecties van P op BC, AC en AB achtereenvolgens met P_A, P_B en P_C. Bewijs

   $$|PP_A| + |PP_B| + |PP_C| = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|AB|.$$

   (Hint: maak gebruik van het begrip oppervlakte.)
   Antw. De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,|AB|$. Deze oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van driehoeken $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ en $\triangle ACP$. De oppervlakte van $\triangle ABP$ is gelijk aan $\frac{1}{2}|AB| \cdot |PP_C|$. Net zo: $\text{Opp}(\triangle ACP) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |PP_B|$ en $\text{Opp}(\triangle BCP) = \frac{1}{2}|BC| \cdot |PP_A|$. Optellen en factor $\frac{1}{2}$ wegdelen levert het gevraagde omdat $|AB| = |AC| = |BC|$.

3. (**8 p**) Gegeven zijn de cirkels $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ en $C_2 : (x-10)^2 + y^2 = 16$. Er zijn twee gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkel die elkaar snijden in een punt tussen de middelpunten van C_1 en C_2. Bepaal vergelijkingen van deze raaklijnen.
Antwoord. Noem het middelpunt van C_1: M_1, dat van de tweede cirkel M_2. Neem een raaklijn als gevraagd en laat P_1 het raakpunt zijn met C_1 en P_2 dat met C_2. Van het snijpunt van de lijnen die elkaar snijden in een punt S tussen de middelpunten $(0,0)$ en $(10,0)$ halen we de x-coördinaat uit de gelijkvormige driehoeken $\triangle M_1P_1S$ en M_2P_2S (hhh: overstaande hoeken $\angle M_1SP_1 = \angle M_2SP_2$, en rechte hoeken bij P_1 en P_2): $\frac{1}{x} = \frac{4}{10-x}$ zodat $x = 2$; snijpunt $(2,0)$. De

richtingscoëfficiënt van een raaklijn halen we uit een van de net genoemde driehoeken: $\pm 1/\sqrt{3}$ (bijvoorbeeld via P_1M_1/P_1S). De lijnen worden $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ en $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$.

4. Gegeven is $\triangle ABC$. Bij elke keuze van een oorsprong geven we de met A corresponderende vector aan met $\vec{a}$ enz. Verder is het punt P gegeven dat correspondeert met

$$\vec{p} = \frac{1}{10}(2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}).$$

a) (**2 p**) Punt F ligt op lijnstuk AB en verdeelt het lijnstuk in de verhouding $3:2$, dus $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{3}{2}$. Bewijs dat de met F corresponderende vector $\vec{f}$ te schrijven is als

$$\frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b}).$$

Antw.

$$\vec{a} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b}).$$

b) (**3 p**) Bewijs dat C, P en F op één rechte liggen.
Antw. Kies de oorsprong in C. Dan is $\vec{p} = \frac{1}{10}(2\vec{a} + 3\vec{b})$ en $\vec{f} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$. Deze laatste twee zijn een veelvoud van elkaar.

c) (**3 p**) De lijn AP snijdt BC in D. Bepaal de verhouding $\frac{|BD|}{|DC|}$.
Antw. Leg de oorsprong in A. Nu ligt

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{1}{10}(3\vec{b} + 5\vec{c}) = \frac{1}{8}(3\vec{b} + 5\vec{c})$$

op BC. De verhouding is $5:3$.

5. In het vlak is gegeven de lijn ℓ en het punt A buiten ℓ. Van de isometrie T van het vlak is gegeven dat $T(\ell) = \ell$ (dus T transformeert elk punt van ℓ in een, mogelijk ander punt van ℓ) en dat $T(A)$ het spiegelbeeld is van A bij loodrechte spiegeling in ℓ.

a) (**4 p**) Zij m de lijn door A en loodrecht op ℓ. Bewijs dat T het snijpunt B van ℓ en m vastlaat.
Antw. Het idee is dat B het unieke punt op ℓ is op afstand $|AB|$ van A en van $T(A)$ en dus niet in een ander punt van ℓ kan worden overgevoerd. Hier zijn de details (maak een plaatje!).
Omdat $T(A)$ het spiegelbeeld is van A in ℓ is B het midden van lijnstuk $AT(A)$. Schrijf d voor de afstand $|AB|$ (of $d(A,B)$). Dus ook $d = d(T(A), B)$. Nu levert Pythagoras toegepast op $\triangle BT(A)C$ met C een punt op ℓ dat $T(A)C^2 = T(A)B^2 + BC^2$. Hieruit volgt dat B het enige punt op ℓ is op afstand d van $T(A)$ (als $C \neq B$ een punt is op ℓ, dan is $T(A)C^2 > T(A)B^2$). Dit passen we toe op $C = T(B)$. Omdat $d(T(A), T(B)) = d(A,B) = d$ (eigenschap isometrie) is $T(B)$ een punt op ℓ (gegeven eigenschap van T) dat op afstand d van $T(A)$ ligt. Dus $T(B) = B$.
Alternatief: als S de spiegeling in ℓ is, bekijk dan ST en leid dan eerst af dat ST het punt B vast laat.

b) (**4 p**) Bepaal alle mogelijkheden voor de isometrie T.
Antw. Zij S de spiegeling in ℓ. Bekijk ST. Deze laat A vast, ook B. Als C een derde punt op ℓ is dat vast blijft, dan is ST de identiteit (drie vaste punten die niet collineair zijn) en dan is $T = S^{-1} = S$ een spiegeling in ℓ.
Als een punt C op ℓ niet vast blijft, wordt C overgevoerd in het spiegelbeeld in m, het enige andere punt op ℓ met dezelfde afstand tot B. Is R de spiegeling in m, dan is RST de identiteit vanwege de drie niet collineaire vaste punten A, B, C. Dus $T = SR$, een rotatie om B over 180°.
Of: Zij S de spiegeling in ℓ. ST laat twee punten vast, A en B, en is dus de identiteit of een spiegeling in AB (stelling dictaat). In het eerste geval is $T = S$, in het tweede geval is T de rotatie om B over 180°.

6. Geef, *zonder toelichting*, op uw antwoordvel aan welke beweringen waar respectievelijk onwaar zijn.
Elk goed antwoord levert **1 punt** op, elk fout antwoord **−1 punt**, een onderdeel zonder antwoord levert **0 punten** op, met dien verstande dat u voor deze opgave altijd in totaal **minimaal 0 punten** haalt (en maximaal 5 punten).

a) Het regelmatige veelvlak $\{p, q\}$ is opgebouwd uit regelmatige p-hoeken waarvan er in elk hoekpunt q samenkomen. Voor zo'n veelvlak geldt dan dat $qH = pV$ waarin H het aantal hoekpunten en V het aantal zijvlakken is.
Antw. Waar. In elk van de H hoekpunten komen q zijvlakken samen. Dit levert qH zijvlakken, maar elk zijvlak is hierbij p maal geteld, dus $qH/p = V$ ofwel $qH = pV$.

b) In *De Elementen* van Euclides staat beschreven hoe voor elke gehele $n \geq 3$ de regelmatige n-hoek kan worden geconstrueerd.
Onwaar.

c) Gegeven in het vlak drie niet op één lijn gelegen punten A, B en C en een punt D tussen A en B. Het Pasch-axioma uit het Hilbert-stelsel concludeert dat elke lijn door D nog een ander punt (dan D) van $\triangle ABC$ bevat.
Waar. De lijn snijdt nog een andere zijde.

d) Voor elk drietal vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, elk $\neq \vec{0}$, in de ruimte geldt $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.
Onwaar. Neem $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$ (maar wel $\neq \vec{0}$).

e) Voor elke loodrechte spiegeling S in een lijn en elke translatie T over een vector loodrecht op die lijn is de samenstelling $S \circ T$ een loodrechte spiegeling.
Waar. Een translatie is de samenstelling van twee spiegelingen in assen loodrecht op de translatievector. Laat hiervan de tweede spiegelas samenvallen met de spiegelas van de gegeven spiegeling. Dan blijft één spiegelinbg over.