

## Tentamen Deterministische Modellen in de OR (158075)

Maandag 10 maart 2003 van 13.30 – 16.30 uur

### Opmerkingen vooraf:

1. Gelieve het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen.
3. Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
4. Het eindcijfer wordt bepaald door afronding van (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

### Opgave 1 (8 punten)

Gegeven is het volgende LP-probleem:

$$\begin{aligned} \text{MAX } z &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } \quad &2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 90 \\ &x_2 + x_3 \leq 45 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Los dit probleem op met de simplexmethode.
- b) Veronderstel dat de rechterleden van de restricties respectievelijk  $90+\Delta$  en  $45+2\Delta$  zijn. Voor welke waarden van  $\Delta$  blijft de huidige basis optimaal? Wat wordt de nieuwe doelfunctiewaarde dan?
- c) Laat zien dat in dit probleem aan de *complementary slackness* conditie is voldaan.
- d) Laat zien dat er een alternatieve optimale oplossing bestaat voor dit probleem en bepaal deze uitgaande van het eindtableau in opgave a)

### Opgave 2 (7 punten)

Voor de voltooiing van een project moeten de activiteiten A t/m G worden afgerond. De afhankelijkheidsrelaties tussen de verschillende activiteiten en de verwachte tijdsduren (in weken) van de activiteiten staan in de tabel op de volgende bladzijde.

- a) Teken een AoA (*activity on arc*)- netwerk.
- b) Bepaal voor alle knopen in het netwerk de *early event time* (ET) en de *late event time* (LT). Wat is de totale tijdsduur van het project?
- c) Bepaal voor alle activiteiten de *total float* (TF). Wat is het kritieke pad?

| Activiteit | Voorgangers | Tijdsduur |
|------------|-------------|-----------|
| A          | -           | 9         |
| B          | -           | 5         |
| C          | -           | 10        |
| D          | B           | 3         |
| E          | A,D         | 3         |
| F          | C           | 3         |
| G          | E,F         | 8         |

- d) In het algemeen kan een aantal activiteiten ingekort worden door extra kosten te maken. Neem aan dat de activiteiten A, C, E en G ingekort kunnen worden met maximaal a, c, e en g weken tegen extra kosten ter grootte  $K_a$ ,  $K_c$ ,  $K_e$  en  $K_g$  euro per week. Geef een LP-formulering waarmee de goedkoopste oplossing bepaald kan worden waarvoor de totale tijdsduur van het gehele project niet meer dan 18 weken bedraagt.

### Opgave 3 (8 punten)

Een prijsvechter mag vanaf het vliegveld van Indianapolis 6 vluchten per week uitvoeren. Mogelijke bestemmingen zijn New York, Los Angeles en Miami. In de tabel staat de winstbijdrage (in dollars) bij een bepaald aantal vluchten naar een bepaalde bestemming.

|             | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| New York    | 80  | 150 | 210 | 250 | 270 | 280 |
| Los Angeles | 100 | 195 | 275 | 325 | 300 | 250 |
| Miami       | 90  | 180 | 265 | 310 | 350 | 320 |

Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Definieer hiertoe achtereenvolgens

- fasen
- toestanden
- beslissingen
- kostenfunctie

Geef de recurrente betrekking voor de kostenfunctie.

Bepaal via dynamische programmering alle (twee) optimale oplossingen voor het bovenstaande probleem.

### Opgave 4 (8 punten)

De EU staat voor de afweging hoe ze het budget  $B$  (in euro's) voor projecten op het gebied van de regionale ontwikkeling moet verdelen over 16 ingediende voorstellen. Project 1 en 2 zijn ingediend door Spanje, project 3 door Portugal, project 4 tot en met 7 door Griekenland, project 8 door Nederland, project 9 door Ierland, project 10 door Duitsland, project 11 en 12 door Denemarken en de overige projecten door Frankrijk. Voor project  $P_j$  is een subsidie gevraagd ter grootte  $V_j$ . Het totaal van de subsidie-aanvragen overschrijdt het budget met 10%. Neem aan dat het totale budget wordt toegewezen. De bijdrage van elk project aan de doelstellingen voor regionale ontwikkeling die door de EU zijn opgesteld, is door een commissie van deskundigen vastgesteld en weergegeven op een schaal van 1 (heel weinig) tot 10 (heel veel). De score voor project  $P_j$  bedraagt  $s_j$ . Neem aan dat de EU de bijdrage aan de doelstellingen voor regionale ontwikkeling wil maximaliseren (waarbij een deeltewijzing tot een deelbijdrage leidt) onder de volgende randvoorwaarden:

- Elk project krijgt minstens 35% toegewezen van de gevraagde subsidie;
- Tenminste 50% en ten hoogste 70% van het budget wordt toegewezen aan Spanje, Portugal en Griekenland;
- Portugal en Ierland krijgen relatief t.o.v. wat ze gevraagd hebben evenveel subsidie toegewezen.

- a) Formuleer dit probleem als een linear programmeringsprobleem. Geef duidelijke definities van de beslissingsvariabelen en geef een duidelijke argumentatie voor doelfunctie en randvoorwaarden.

Naast sociale en economische factoren spelen ook politieke aspecten een rol bij de toewijzing. Neem aan dat, in afwijking van wat hierboven is aangenomen, niet elk project subsidie krijgt toegewezen. Indien projecten subsidie krijgen, dan kan dat eventueel ook minder zijn dan 35% van het gevraagde bedrag. Neem verder aan dat voor de toewijzing de volgende regels gelden:

- Als Spanje een project krijgt toegewezen, dan Portugal ook;
- Griekenland krijgt voor maximaal 2 projecten subsidie;
- Als Ierland haar project krijgt toegewezen, dan krijgt Nederland niets.

- b) Definiceer extra beslissingsvariabelen en formuleer het uitgebreide probleem nu als een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem (mixed ILP). Geef duidelijk aan welk deel van het LP-probleem uit a) nog bruikbaar is.

#### Opgave 5 (5 punten)

Een juwelier gebruikt voor de productie van 2 soorten ringen robijnen en saffieren. Voor een ring van type 1 zijn 2 robijnen, 3 saffieren en een uur arbeidstijd nodig, voor een ring van type 2 3 robijnen, 2 saffieren en 2 uur arbeidstijd. De verkoopprijs bedraagt respectievelijk 400 en 500 dollar. Momenteel zijn 100 robijnen, 120 saffieren en 70 uur arbeid beschikbaar. Er is veel vraag naar beide soorten ringen. Eventueel kunnen extra robijnen worden besteld bij een andere juwelier voor 100 dollar per stuk. Er zijn reeds 20 bestellingen voor een ring van type 1 en 25 voor een ring van type 2 binnen. De juwelier probeert zijn winst te maximaliseren. Onderstaand de Lindo output voor dit probleem, waarbij de volgende symbolen zijn gebruikt:

- $X_1$  = aantal ringen van type 1 dat wordt geproduceerd
- $X_2$  = aantal ringen van type 2 dat wordt geproduceerd
- $R$  = aantal robijnen dat extra wordt ingekocht

MAX 400  $X_1$  + 500  $X_2$  - 100  $R$

SUBJECT TO

2)  $2 X_1 + 3 X_2 - R \leq 100$

3)  $3 X_1 + 2 X_2 \leq 120$

4)  $X_1 + 2 X_2 \leq 70$

5)  $X_1 \geq 20$

6)  $X_2 \geq 25$

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 5

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 19000.00

| VARIABLE | VALUE     | REDUCED COST |
|----------|-----------|--------------|
| X1       | 20.000000 | 0.000000     |
| X2       | 25.000000 | 0.000000     |
| R        | 15.000000 | 0.000000     |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|-----|------------------|-------------|
| 2)  | 0.000000         | 100.000000  |
| 3)  | 10.000000        | 0.000000    |
| 4)  | 0.000000         | 200.000000  |
| 5)  | 0.000000         | 0.000000    |
| 6)  | 0.000000         | -200.000000 |

NO. ITERATIONS= 5

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

| OBJ COEFFICIENT RANGES |              |                    |                    |
|------------------------|--------------|--------------------|--------------------|
|                        | CURRENT COEF | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
| X1                     | 400.000000   | INFINITY           | 100.000000         |
| X2                     | 500.000000   | 200.000000         | INFINITY           |
| R                      | -100.000000  | 100.000000         | 100.000000         |

| RIGHTHAND SIDE RANGES |             |                    |                    |
|-----------------------|-------------|--------------------|--------------------|
| ROW                   | CURRENT RHS | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
| 2                     | 100.000000  | 15.000000          | INFINITY           |
| 3                     | 120.000000  | INFINITY           | 10.000000          |
| 4                     | 70.000000   | 3.333333           | 0.000000           |
| 5                     | 20.000000   | 0.000000           | INFINITY           |
| 6                     | 25.000000   | 0.000000           | 2.500000           |

Beantwoord de volgende vragen, gebruikmakend van de Lindo output:

- Veronderstel dat de inkoopprijs van de extra robijnen \$150 bedraagt. Wat voor invloed heeft dat op de optimale oplossing?
- Wat is de schaduwprijs van restrictie 1 (dat is de restrictie genummerd 2) in de Lindo output)? Leg uit wat de betekenis van de schaduwprijs is.
- Veronderstel dat slechts 22 ringen van type 2 hoeven te worden geproduceerd, wat verandert er dan aan de optimale oplossing?
- Bepaal met de 100% regel of de huidige basis optimaal blijft indien op dit moment 110 robijnen, 120 saffieren en 71 uur arbeidstijd beschikbaar zouden zijn.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.  
This page will not be added after purchasing Win2PDF.