Uitwerking Voorbeeldtentamen DetMOR

1. (a) Standaardvorm + a_i toevoegen:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \max & 5x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 10 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & e_2 & + & a_2 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & & x_1, x_2, s_1, e_2, a_2 \geq 0 \end{array}$$

[1punt]

Fase 1: Vervang doelfunctie door $\max w = -a_2$

BV	w	x_1	x_2	s_1	e_1	a_2	RHS	Ratio
w	1					1	0	
s_1	0	2	-1	1	0	0	10	
a_2	0	-1	2	0	-1	1	2	

elimineer a_2 uit rij 0

w	1	1	$\boxed{-2}$	0	1	0	-2	
s_1	0	2	-1	1	0	0	10	
a_2	0	-1	$\boxed{2}$	0	-1	1	2	1

w	1	0	0	0	0	1	0	
s_1	0	3/2	0	1	-1/2	1/2	11	
x_2	0	-1/2	1	0	-1/2	1/2	1	

Optimaal met $w = 0$, dus toegelaten oplossing. **[1 punt]**

Fase 2: Voeg doelfunctie $\max z = 5x_1 - 2x_2$ toe

BV	z	x_1	x_2	s_1	e_1	RHS	Ratio
z	1	-5	2	0	0	0	
s_1	0	3/2	0	1	-1/2	11	
x_2	0	-1/2	1	0	-1/2	1	

elimineer BV x_2 uit rij 0

z	1	-4	0	0	1	-2	
s_1	0	$\boxed{3/2}$	0	1	-1/2	11	22/3
x_2	0	-1/2	1	0	-1/2	1	

z	1	0	0	8/3	$\boxed{-1/3}$	82/3	
x_1	0	1	0	2/3	-1/3	22/3	∞
x_2	0	0	1	1/3	-2/3	14/3	∞

[1 punt]

Omdat de ratio test niet mogelijk is, is het LP onbegrensd **[1 punt]**

(b) **[2 punten]**

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & 10y_1 & + & 2y_2 & & \\ \text{s.t.} & 2y_1 & - & y_2 & \geq & 5 \\ & -y_1 & + & 2y_2 & \geq & -2 \\ & & & \multicolumn{3}{l}{y_1 \geq 0, y_2 \leq 0} \end{array}$$

(c) Bestaat niet, want (D) is ontoelaatbaar omdat het (P) onbegrensd is. **[1 punt]**

2. (a) Nee, want alle kosten coëfficiënten van niet-basisvariabelen zijn groter dan 0. **[1punt]**

(b) Uit het eindtableau vinden we (de kolommen onder a_1 en a_2, plus de kolom onder s_3):

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, c_{BV} = (2\ 3\ 0)$$

x_3 zit niet in de basis, dus de enige verandering is een verandering in de x_3-kolom in de z-rij.
Neem aan dat $c_3 = -4 + \Delta$.
Dan is $c_{BV}B^{-1}a_3 - c_3 = (-4\ 0\ 3)(0\ \ -2\ 1)^T - (-4 + \Delta) = 7 - \Delta = 0$ als $\Delta = 7$.
Dus voor $c_3 \leq 3$ blijft de basis optimaal. **[1 punt]**

(c) Stel b_3 wordt $24 + \Delta$.

$$B^{-1}b \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 5 \\ 14 + \Delta \\ 5 + \Delta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

waaruit volgt dat voor $-5 \leq \Delta$ de basis optimaal blijft. De verandering van 24 naar 28 komt overeen met $\Delta = 4$. In dat geval wordt de basisoplossing gelijk aan (5 18 0) met $z = 64$, een toename van 12 ($= 4^*$ schaduwprijs in de s_3-kolom). **[2 punten]**

(d) **[2 punten]**

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \min & 5y_1 & + & 14y_2 & + & 24y_3 & & \\ \text{s.t.} & y_1 & + & y_2 & + & 2yy_3 & \geq & 2 \\ & 1 & & y_2 & + & y_3 & \geq & 3 \\ & & - & 2y_2 & + & y_3 & \geq & -4 \\ & & & \multicolumn{5}{l}{y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0} \end{array}$$

Oplossing (D) uit tableau bij e_1, e_2 en s_3, waarbij – teken toevoegen bij e_1, e_2: $y = (-4, 0, 3)$ **[1 punt]**

3. (a) Oplossing verandert niet omdat allowable increase = 20
Nieuwe doelfunctiewaarde = $32540 + 88 \cdot 10 = 33420$ ($x_1 = 88, \Delta = 10$).
[1 punt]

(b) Niet te zeggen omdat voor voorwaarde 2) allowable increase $= 0.4 < 1$. **[1punt]**

(c) Allowable decrease bij 6) $= 3 > 2$ dus blijft basis optimaal.
Verandering doelfunctie: $32540 + (-2) \cdot (-20) = 32580$ ($\Delta = -2$),
dual price $= -20$. **[1 punt]**

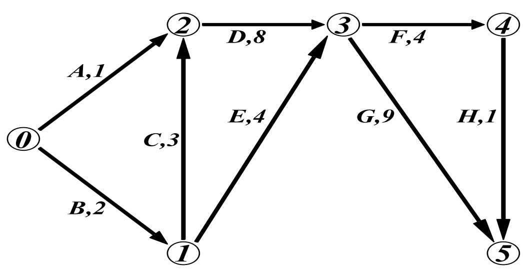
(d) Niets, dual price is 0 en allowable increase $= \infty$. **[1 punt]**

4. Greedy algorithm

Initieel: kies $S = \{\text{willekeurig punt}\}, MST = \emptyset$
$S = \{1\},\ MST = \emptyset$
voeg altijd zo goedkoop mogelijk een punt toe aan S.
$S = \{1, 2\},\ MST = \{(1, 2)\}$
$S = \{1, 2, 4\}, MST = \{(1, 2), (2, 4)\}$
$S = \{1, 2, 4, 3\}, MST = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3)\}$
$S = \{1, 2, 4, 3, 5\}, MST = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 5)\}$
[1.5 punt]

Waarde $MST = 4 + 2 + 6 + 1 = 13$. **[0.5 punt]**

5. (a)



[2 punten]

(b)

i	0	1	2	3	4	5	
$ET(i)$	0	2	9	17	21	26	**[1/2 punt]**
$LT(i)$	0	6	9	17	25	26	**[1/2 punt]**

$TF(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$
$FF(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}$

act	A	B	C	D	E	F	G	H	
TF	0	4	4	0	11	4	0	4	**[1/2 punt]**
FF	0	0	4	0	11	0	0	4	**[1/2 punt]**

Kritieke pad = pad van 0 naar 5 bestaande uit activiteiten met $TF = 0$
$= A - D - G$ **[1 punt]**

6. • Laat voor $i = 1, \ldots, 4$ en $j = 1, \ldots, 3$: $x_{ij} = 1$ als locatie i wordt gebruikt om autotype j te produceren (type 1 = Taurus, etc.) en anders $x_{ij} = 0$, **[1 punt]**

- Laat voor $j = 1, \ldots, 4$: $y_j = 1$ als er op locatie j wordt geproduceerd, anders $y_j = 0$, **[1/2 punt]**
- z is een hulpvariabele nodig voor de als-dan-constraint.

De doelfunctie w, uitgedrukt in miljoenen dollars, is dan: (bedenk dat van elk type auto 500.000 auto's worden gemaakt op exact één locatie):

$$\min w = 7y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 6x_{11} + 8x_{12} + 4.5x_{13} + 7.5x_{21} + 9x_{22}$$
$$+5.5x_{23} + 8.5x_{31} + 9.5x_{32} + 6x_{33} + 9.5x_{41} + 11x_{42} + 7x_{43}$$ **[1 punt]**

s.t.

$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} = 1$ (Elk type j moet worden gemaakt ($j = 1, 2, 3$) **[1/2 punt]**

$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \leq 1$ (in locatie i kan hoogstens 1 type worden gemaakt ($i = 1, \ldots, 4$)) **[1/2 punt]**

$x_{ij} \leq y_i$ voor alle $i = 1, \ldots, 4$ en alle $j = 1, 2, 3$ (y_i mag alleen nul zijn als op locatie i niets wordt geproduceerd) **[1/2 punt]**

$1 - y_1 \leq z$

$y_3 + y_4 - 1 \leq 1 - z$ (deze twee constraints geven aan dat als er op de locaties 3 en 4 wordt geproduceerd, dan ook op locatie 1) **[$1\frac{1}{2}$ punt]**

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ voor alle $i = 1, \ldots, 4$ en alle $j = 1, \ldots, 3$ (samen met de eerste constraint garandeert dit dat elk type op precies één locatie wordt geproduceerd)

$y_j \in \{0, 1\}$ voor alle $j = 1, \ldots, 3$

$z \in \{0, 1\}$ **[1/2 punt]**

7.
- Fasen: de producttypen $t = 1, 2, 3$. **[1/2 punt]**
- Toestanden: i = resterende capaciteit (in eenheden van 100 kg.) **[1/2 punt]**
- Beslissingen: x = het aantal containes van type t dat meegenomen wordt. **[1/2 punt]**
- Kostenfunctie: $f_t(i)$ = de maximale opbrengst als i eenheden capaciteit van 100 kg. beschikbaar zijn voor de producttypen $t, t+1, .., 3$.
- Recursie: $f_t(i) = \max\limits_{0 \leq x \leq i} \{r_t(x) + f_{t+1}(i - x)\}$
  met $r_t(x)$ = opbrengsten bij toewijzing van x containers van type t, waarbij het maximum wordt genomen over alle mogelijke keuzes voor het aantal containers van type t, d.w.z. het aantal dat meegenomen wordt is niet meer dan het maximum van dat type en het totale gewicht is niet meer dan i. **[$1\frac{1}{2}$ punt]**

  Fase 3:

i	$f_3(i)$	x
0-4	0	0
5-9	12	1
10-15	24	2

  Merk op dat bij $i = 15$ niet 3 containers meegenomen kunnen worden, want er zijn er maar 2 beschikbaar van type 3.

Fase 2:

I	$f_2(i)$	x
0-2	0	0
3,4	7	1
5	$\max\{0+12, 7+0\} = 12$	0
6,7	$\max\{0+12, 7+0, 14+0\} = 14$	2
8	$\max\{0+12, 7+12, 14+0\} = 19$	1
9	$\max\{0+12, 7+12, 14+0, 21+0\} = 21$	3
10	$\max\{0+24, 7+12, 14+0, 21+0\} = 24$	0
11	$\max\{0+24, 7+12, 14+12, 21+0\} = 26$	2
12	$\max\{0+24, 7+12, 14+12, 21+0, 28+0\} = 28$	4
13	$\max\{0+24, 7+24, 14+12, 21+0, 28+0\} = 31$	1
14,15	$\max\{0+24, 7+24, 14+12, 21+12, 28+0\} = 33$	3

Fase 1:

I	$f_1(i)$	x
15	$\max\{0+33, 5+31, 10+26, 15+21\} = 36$	1 of 2 of 3

[$1\frac{1}{2}$ **punt**]

Er zijn 3 optimale oplossingen: (1,1,2), (2,2,1) en (3,3,0) met opbrengst 3600 euro. [$\frac{1}{2}$ **punt**]