Uitwerking Tentamen Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT/TEL
Vakcode: 152161
Datum: 29 oktober 2004

1. a. COLLEGEBEZOEK heeft 13 letters, 2xO, 2xL en 4xE.
Dus aantal ordeningen zonder dubbeltellingen: $\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 4!}(=64.864.800)$.

b. Beschouw de 6 klinkers in COLLEGEBEZOEK als één blok.
$\frac{6!}{2!\cdot 4!}$ manieren om de klinkers in dit blok te ordenen.
Bovenstaand klinkerblok vormt, samen met de 7 medeklinkers, 8 symbolen, waarvan 2xL, dus $\frac{8!}{2!}$ manieren om deze symbolen te ordenen.
Dus totaal $\frac{6!\cdot 8!}{2!\cdot 4!\cdot 2!}(=302.400)$ manieren.

c. |C|O|L|L|G|B|Z|O|K| De 10 strepen geven de plaatsen aan waar een E gezet kan worden. We moeten dus willekeurig 4 plaatsen kiezen uit 10. Dat kan op $\binom{10}{4}$ manieren. Het aantal manieren om de overige 9 letters (met 2xO en 2xL) te ordenen is: $\frac{9!}{2!\cdot 2!}$. Dus totaal $\binom{10}{4}\cdot\frac{9!}{2!\cdot 2!}(=19.051.200)$ manieren.

2. a. Zelfde probleem als $25-4\cdot 2=17$ boeken verdelen over 4 studenten (waarbij iedere student minstens nul boeken krijgt).
Dus aantal manieren om 3 schotten en 17 letters x te ordenen.
Dus $\binom{20}{17}(=1.140)$ manieren.

b. Ieder object kan op 3 manieren geplaatst worden.
Dus totaal: $3^5\,(=243)$ manieren.

3. a.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$q\wedge\neg q$	$\neg p\to(q\wedge\neg q)$	$\neg p\wedge r$	$p\to(\neg p\wedge r)$	Totaal
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0

De bewering is altijd onwaar (zie laatste kolom), dus een tegenspraak.

b.

Stapnr	Bewering	Stapnrs, Laws en Rules
1	$\neg(r \vee s)$	Premisse
2	$\neg r \wedge \neg s$	1, L2
3	$\neg s \wedge \neg r$	2, L3
4	$\neg s$	3, R7
5	$p \vee s$	Premisse
6	$s \vee p$	5, L3
7	p	6, 4, R5
8	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisse
9	$q \rightarrow r$	7, 8, R1
10	$\neg r$	2, R7
11	$\neg q$	9, 10, R3

4. a.

Stapnr	Bewering	Stapnrs, Laws en Rules
1	$\exists x p(x)$	Premisse
2	$p(c)$	1, U2
3	$\neg\neg p(c)$	2, L1
4	$\forall x[(q(x) \vee r(x)) \rightarrow \neg p(x)]$	Premisse
5	$(q(c) \vee r(c)) \rightarrow \neg p(c)$	4, U1
6	$\neg(q(c) \vee r(c))$	5, 3, R3
7	$\neg q(c) \wedge \neg r(c)$	6, L2
8	$\neg r(c) \wedge \neg q(c)$	7, L3
9	$\neg r(c)$	8, R7
10	$\exists x(\neg r(x))$	9, U4
11	$\neg \forall x\, r(x)$	10, N1

b. Tegenvoorbeeld: neem: $U = N$, $p(x): x < 0$, $q(x): x \in N$, $r(x): x \in N$.
Dan geldt: $\neg\exists x(p(x))$, dus ook: $\neg\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$ (Premisse 1)
Ook geldt: $\exists x(q(x) \wedge r(x))$ (bijv: x = 1) (Premise 2).
Maar niet: $\exists x(p(x) \wedge r(x))$. (Conclusie)
(Vele andere tegenvoorbeelden zijn mogelijk!)

5. a. $A - B = \{2,4,6\}$
Dus: $P(A-B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$.

b. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$. Dus $|A \cup B| = 8$.
Een deelverzameling van $A \cup B$ die element 5 bevat correspondeert met een deelverzameling van $\{1,2,3,4,6,7,9\}$ waaraan het element 5 is toegevoegd. Het gevraagde aantal is dus precies gelijk aan het aantal deelverzamelingen van $\{1,2,3,4,6,7,9\}$. Dus dit aantal is: $2^{|\{1,2,3,4,6,7,9\}|} = 2^7 = 128$.

6. Te bewijzen: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$ voor alle $n \geq 1$.

Bewijs m.b.v. mathematische inductie:

Inductiebasis voor $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{i=1}^{1}(2i-1)^3 = (2\cdot 1-1)^3 = 1 \\ 2\cdot 1^4 - 1^2 = 1 \end{array}\right\} \text{Klopt!}$$

Inductiehypothese: Stel $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^3 = 2k^4 - k^2$ voor een vaste $k \geq 1$

We moeten nu aantonen dat dan ook: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^3 = 2(k+1)^4 - (k+1)^2$. (**)

Uitwerking linkerlid van (**): $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^3 = \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^3 + (2(k+1)-1)^3$.

Volgens de inductiehypothese is dit gelijk aan: $2k^4 - k^2 + (2(k+1)-1)^3$.

Haakjes uitwerken geeft: $2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$.

Uitwerking rechterlid van (**): $2(k+1)^4 - (k+1)^2 = 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$.

Linker- en rechterlid zijn gelijk, dus uit het principe van mathematische inductie volgt nu dat: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$ voor alle $n \geq 1$.

7. Er geldt: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Dus: $2\cdot 25 = 2\cdot 1 + 5\cdot 2 + \text{som van graden van de overige } n-7 \text{ punten}$.

Ofwel: $38 = \text{som van graden van de overige } n-7 \text{ punten}$.

De overige $n-7$ punten hebben allen graad ≥ 3, dus: $38 \geq 3(n-7)$.

Dus: $38 \geq 3n - 21$. Dus: $n \leq \frac{38+21}{3} = 19\frac{2}{3}$. Dus: $|V|_{\max} = 19$.

8. a. Een opspannende deelgraaf van G_1 bevat per definitie alle punten van G_1.
De 11 lijnen van G_1 kunnen wel of niet in de deelgraaf worden opgenomen.
In totaal zijn er dus $2^{11} = 2048$ opspannende deelgrafen van G_1.

b. Het is mogelijk om G_1 met 3 kleuren te kleuren: geef de punten *a* en *e* kleur 1, de punten *b*, *c* en *f* kleur 2 en de punten *d* en *g* kleur 3. Dus: $c(G_1) \leq 3$.
Maar ook: $c(G_1) \geq 3$, want K_3 is een deelgraaf van G_1. Dus: $c(G_1) = 3$.

c. De *breath first search* opspannende boom van G_1, bij puntenvolgorde *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* heeft lijnenverzameling: $\{(a,b),(a,c),(a,f),(b,d),(b,g),(c,e)\}$.

d. G_1 en G_2 zijn isomorf. Een isomorfisme f wordt gegeven door:
$f(a) = z$; $f(b) = y$; $f(c) = u$; $f(d) = v$; $f(e) = t$; $f(f) = x$; $f(g) = w$.