Uitwerking Tentamen Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT/TEL
Vakcode: 152161
Datum: 21 januari 2005

1. a. 26 letters, volgorde niet van belang, dus $26^{10}(=141.167.095.653.376)$ woorden.

   b. Elke letters verschilt van al zijn voorgangers, dus:
   $26 \cdot 25 \cdot \cdots \cdot 17 = \dfrac{26!}{16!}(=19.275.223.968.000)$ woorden.

   c. Iedere letter moet verschillen van zijn directe voorganger, dus:
   $26 \cdot 25 \cdot \cdots \cdot 25 = 26 \cdot 25^9 (=99.182.128.906.250)$ woorden.

   d. 10 letters: 2xA, 3xE en 5 andere verschillende letters (van de 24 overige).
   $\binom{24}{5}$ manieren om de 5 andere letters te kiezen en $\dfrac{10!}{2! \cdot 3!}$ verschillende manieren om de 10 letters te ordenen, dus: $\binom{24}{5}\dfrac{10!}{2! \cdot 3!}(=12.853.209.600)$ woorden.

   e. Noem: $x_1 =$ aantal keer dat A dat in het woord voorkomt ,
   $x_2 =$ aantal keer dat B dat in het woord voorkomt
   t/m $x_{26} =$ aantal keer dat Z dat in het woord voorkomt .
   Dan geldt: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{26} = 10$ en $x_i \geq 0$ voor alle i.
   Dus het aantal woorden is: $\binom{26+10-1}{10} = \binom{35}{10}(=183.579.396)$.

   f. Als e. maar nu met $x_1 \geq 2$ en $x_5 \geq 5$ (en $x_i \geq 0$ voor de overige *i*).
   Substitutie van $y_1 = x_1 - 2$; $y_5 = x_5 - 3$ (en $y_i = x_i$ voor de overige *i*) geeft dan: $y_1 + y_2 + \cdots + y_{26} = 10 - 2 - 3 = 5$ en $y_i \geq 0$ voor alle i.
   Dus het aantal woorden is: $\binom{26+5-1}{5} = \binom{30}{5}(=142.506)$.

2. a.

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \rightarrow r$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \rightarrow r)$	$\neg q \rightarrow r$	Totaal
0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1

De bewering is <u>niet altijd</u> waar (zie laatste kolom), dus geen tautologie.

b.

Stapnr	**Bewering**	**Stapnrs, Laws en Rules**
1	q	Premisse
2	$\neg q \vee p$	Premisse
3	$\neg\neg q$	1, L1
4	p	3, R5
5	$p \vee r$	4, R8
6	$(p \vee r) \rightarrow s$	Premisse
7	s	6, R1
8	$s \wedge p$	4, 7, R4
9	$(s \wedge p) \vee (s \wedge r)$	8, R8
10	$(s \wedge r) \vee (s \wedge p)$	9, L3

3. a.

Stapnr	**Bewering**	**Stapnrs, Laws en Rules**
1	$\exists x\, p(x)$	Premisse
2	$p(c)$	1, U2
3	$\forall x(\neg p(x) \vee q(x))$	Premisse
4	$\neg p(c) \vee q(c)$	3, U1
5	$p(c) \rightarrow q(c)$	4, L12
6	$q(c)$	2, 5, R1
7	$\forall x(q(x) \rightarrow r(x))$	Premisse
8	$q(c) \rightarrow r(c)$	7, U1
9	$r(c)$	6, 8, R1
10	$\forall x(s(x) \vee \neg r(x))$	Premisse
11	$s(c) \vee \neg r(c)$	10, U1
12	$\neg r(c) \vee s(c)$	11, L3
13	$r(c) \rightarrow s(c)$	12, L12
14	$s(c)$	9, 13, R1
15	$\exists x\, s(x)$	14, U4

b. Tegenvoorbeeld: neem: $U = N$, $p(x): x$ is even, $q(x): x$ is oneven.
Dan geldt: $\forall x(p(x) \vee q(x))$ (Premisse),
maar niet: $\forall x\; p(x) \vee \forall x\; q(x)$. (Conclusie)
(Vele andere tegenvoorbeelden zijn mogelijk!)

4. a. $\overline{A} = (-\infty,-3) \cup [-1,1] \cup [3,\infty)$; $A \cup B = [-3,3)$; $A \cap B = (-2,-1) \cup (1,2]$;
$A - B = [-3,-2] \cup (2,3)$; $B - A = [-1,1]$; $A \Delta B = [-3,-2] \cup [-1,1] \cup (2,3)$.

b. Bewijs: Laat $X \subseteq U$. Dan geldt:
$X \in P(C) \cap P(D) \Leftrightarrow (X \in P(C) \wedge X \in P(D)) \Leftrightarrow (X \subseteq C \wedge X \subseteq D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X \subseteq (C \cap D) \Leftrightarrow X \in P(C \cap D)$.

5. a. Te bewijzen: $\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)}$ voor alle $n \geq 3$.

Bewijs m.b.v. mathematische inductie:

<u>Inductiebasis</u> voor $n = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=3}^{3} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \text{Klopt!}$$

<u>Inductiehypothese</u>: Stel $\sum_{i=3}^{k} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2k(k-1)}$ voor <u>een vaste</u> $k \geq 3$

We moeten nu aantonen dat dan ook: $\sum_{i=3}^{k+1} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)k}$ (**).

<u>Uitwerking linkerlid van (**)</u>:

$$\sum_{i=3}^{k+1} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \sum_{i=3}^{k} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} + \frac{1}{(k+1)k(k-1)}.$$

Volgens de inductiehypothese is dit gelijk aan: $\frac{1}{4} - \frac{1}{2k(k-1)} + \frac{1}{(k+1)k(k-1)}$.

Breuken gelijknamig maken en optellen geeft:

$$\frac{1}{4} - \frac{k+1}{2(k+1)k(k-1)} + \frac{2}{2(k+1)k(k-1)} = \frac{1}{4} - \frac{k-1}{2(k+1)k(k-1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)k}.$$

Linker- en rechterlid van (**) zijn dus gelijk, dus uit het principe van mathematische inductie volgt nu dat:

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)} \text{ voor } \underline{\text{alle}}\ n \geq 3.$$

b. $a_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1 = 2\cdot 2^n + n + 1 = a_n + 2^n + 1$.

Dus: $a_{n+1} = a_n + 2^n + 1 \quad (n \geq 0)$ en $a_0 = 2^0 + 0 = 1$.

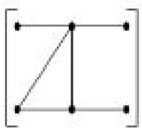
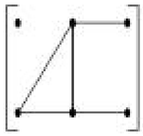
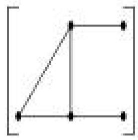
(ook goed is bijv: $a_{n+1} = 2a_n - n + 1 \quad (n \geq 0)$).

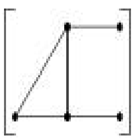
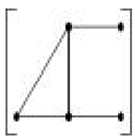
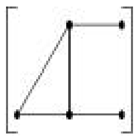
6. a. Wandeling van a naar c die geen route is: $a \to b \to d \to b \to c$.

Route van a naar c die geen pad is: $a \to b \to d \to e \to b \to c$.

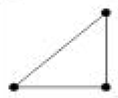
b. Vier punten van oneven graad, dus twee extra lijnen nodig.

Bijv: de lijnen (a, e) en (c, f).

c. $P(G, l) =$  $=$  $-$ 

$= l$  $-$  $= (l-1)$ 

Deze procedure voortzetten door de eindpunten c en f te elimineren geeft dan:

$P(G,l)=(l-1)^3$ $\Big[$  $\Big]$ $=(l-1)^3\, l\,(l-1)(l-2).$

Dus: $P(G,l)= l\,(l-1)^4(l-2)$.

d. Er geldt: $c(G)=3$, want $l=3$ is de laagste waarde van l waarvoor. $P(G,l)\neq 0$ (zie c).
Alternatief: *G* kan met 3 kleuren worden gekleurd,
bijv: geef de punten *a*, *c*, *d* en *f* kleur 1, punt *b* kleur 2 en punt *e* kleur 3.
Dus: $c(G)\leq 3$. Maar ook $c(G)\geq 3$, want *G* bevat een K_3. Dus: $c(G)=3$.

7. a. De bijbehorende Poolse notatie luidt: $-\uparrow -a*2c2/+b4+\uparrow d22$.

b. Invullen van $a=1$, $b=-2$ en $c=3$ geeft achtereenvolgens:

$+/-*3a\uparrow b2+bc\uparrow--\underline{*2a}bc3 \quad\rightarrow\quad +/-*3a\uparrow b2+bc\uparrow-\underline{-2b}c3$

$\rightarrow\quad +/-*3a\uparrow b2+bc\uparrow\underline{-4c}3 \quad\rightarrow\quad +/-*3a\uparrow b2+bc\underline{\uparrow 13}$

$\rightarrow\quad +/-*3a\uparrow b2\underline{+bc}1 \quad\rightarrow\quad +/-*3a\underline{\uparrow b2}11 \quad\rightarrow\quad +/-\underline{*3a}411$

$\rightarrow\quad +/\underline{-34}11 \quad\rightarrow\quad +\underline{/(-1)1}1 \quad\rightarrow\quad \underline{+(-1)1} \quad\rightarrow\quad 0.$

De waarde van de formule is dus gelijk aan 0.