

Kenmerk : TW2009/DWMP/92/ha

Vak : Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT
Vakcode : 152161
Datum : 6 november 2009
Tijdstip : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Gegeven zijn de 14 letters van het woord PARALLELLOGRAM.
Bepaal het aantal verschillende ordeningen van deze 14 letters als:
 - (a) [1 pt] Er verder geen restricties zijn.
 - (b) [2 pt] Alle letters L naast elkaar staan, zoals bij APOLLLLMAARERG.
 - (c) [3 pt] Alle letters L naast elkaar staan, of alle letters A naast elkaar staan, of alle letters R naast elkaar staan (met "of" wordt hier "v" bedoeld). Voorbeelden: LLROGAAALEPLRM; ORRMALLLLGEAAP en GAAARROELLLLMP.
2.
 - (a) [2 pt] Toon aan dat het aantal ordeningen van m enen en r nullen ($r \geq m - 1$), zonder dat er twee of meer enen naast elkaar staan, gelijk is aan $\binom{r+1}{m}$.
 - (b) [2 pt] Laat $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 20\}$.
Bepaal $|\{C \subseteq A \mid |C| = 8 \wedge (i \in C \Rightarrow i+1 \notin C)\}|$.
Dus bepaal het aantal deelverzamelingen van A met 8 elementen, die geen opeenvolgende integers bevatten.
Hint: Gebruik (a).
3.
 - (a) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":
$$((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)) \iff (\neg p \vee \neg q \vee r).$$
 - (b) [3 pt] Bewijs regel R11, met behulp van de overige "Laws of Logic" en "Rules of Inference".
 - (c) [2 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende argument:
$$\frac{\begin{array}{l} \exists x [p(x) \wedge q(x)] \\ \forall x [q(x) \rightarrow r(x)] \\ \neg \forall x [\neg p(x) \vee r(x)] \end{array}}{\therefore \forall x [p(x) \rightarrow \neg r(x)]}$$
4.
 - (a) [2 pt] Onderzoek met behulp van een *membership table* de geldigheid van het volgende statement over verzamelingen A , B en C in een universum $\mathcal{U}$:
 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$
 - (b) [1 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende statement over een verzameling A : $A \cap \mathcal{P}(A) = \emptyset.$

5. ♣ [4 pt]

Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat

voor alle $n \geq 1$ geldt: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

6. ♣ (a) [2 pt]

Gegeven is een verzameling A , met $|A| = n$. R is een antisymmetrische relatie op A . Bepaal de maximale waarde van $|R|$.

(b) [2 pt]

Gegeven is de verzameling $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definieer een relatie R op B zo dat de door R geïnduceerde partitie van B gelijk is aan $\{\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 6\}\}$.

7. [3 pt]

Een *brug* in een graaf $G = (V, E)$ is een lijn $e \in E$ met de eigenschap dat $\kappa(G - e) > \kappa(G)$. Dus verwijdering van de lijn e vergroot het aantal componenten van de graaf.

Bewijs dat, als alle graden in G even zijn, G geen brug bevat.

8. [4 pt]

Gegeven is een graaf G . Bewijs dat de volgende twee statements equivalent zijn:

7 (i) G is een boom

• (ii) G heeft geen cyclen, maar voor elke lijn $e \notin E$ geldt:
als e wordt toegevoegd aan G ontstaat exact één cykel.

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten