

Kenmerk : TW2011/DWMP/028/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/TI/BIT**

Vakcode : 191521610 (TW); 191521611 (TI/BIT)

Datum : 11 november 2011

Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.

Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).

Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Gegeven zijn de 14 letters van het woord PARALLELLOGRAM. Bepaal het aantal verschillende ordeningen van deze letters indien
 - (a) [1 pt] er verder geen restricties zijn.
 - (b) [1 pt] alle klinkers naast elkaar moeten staan.
 - (c) [2 pt] er geen twee of meer letters L direct naast elkaar mogen staan.
2.
 - (a) [1 pt] Bepaal het aantal manieren om 15 identieke ballen te verdelen over zes genummerde bakken, zo dat in elke bak minstens één bal zit.
 - (b) [3 pt] Bepaal het aantal manieren om hoogstens 15 identieke ballen te verdelen over zes genummerde bakken, zo dat in elke bak minstens één bal zit en de eerste drie bakken samen minstens negen ballen bevatten.
3.
 - (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic" en de "Rules of Inference".
$$\frac{\begin{array}{l} p \vee (q \wedge \neg r) \\ q \rightarrow (\neg p \wedge r) \\ p \vee r \end{array}}{\therefore p \wedge \neg q}$$
 - (b) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.
$$\frac{\exists x p(x) \rightarrow \exists x q(x)}{\therefore \exists x [p(x) \rightarrow q(x)]}$$
 - (c) [2 pt] Toon m.b.v. een tegenvoorbeeld aan dat het volgende argument ongeldig is:
$$\frac{\exists x [p(x) \rightarrow q(x)]}{\therefore \exists x p(x) \rightarrow \exists x q(x)}$$

Z.O.Z.

4. [4 pt]

Laat A en B verzamelingen zijn in een universum $\mathcal{U}$. Toon aan dat:

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \iff A \subseteq B \text{ of } B \subseteq A.$$

5. [4 pt]

De rij getallen $a_1, a_2, a_3, \dots$ is gegeven door:

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ en } a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \text{ als } n \geq 3.$$

Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat:

$$a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n \text{ voor alle } n \geq 1.$$

6. De relatie R op $\mathbb{Z}$ is gegeven door: $(x, y) \in R \iff x + y$ is even.

(a) [2 pt]

Toon aan dat R een equivalentierelatie is op $\mathbb{Z}$.

(b) [1 pt]

Bepaal de met R corresponderende partitie van $\mathbb{Z}$.

(c) [1 pt]

Ga na of R een partiële ordening is op $\mathbb{Z}$.

7. (a) [1 pt]

Bestaat er een graaf met een even aantal punten en een oneven aantal lijnen die een Eulertoer bevat? Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, leg uit waarom niet.

(b) [3 pt]

Van een graaf $G = (V, E)$ is gegeven dat $\deg(v) \geq k$ voor alle $v \in V$.

Toon aan dat G een pad heeft van lengte k .

(Hint: Beschouw een langste pad in G en toon aan dat deze minstens lengte k heeft)

8. [3 pt]

Laat $T = (V, E)$ een boom zijn met $|V| = 60$. Laat, voor $i \in \mathbb{N}$, k_i het aantal punten in T zijn met graad i . Gegeven is dat $k_1 = 35$, $k_2 = 5$, $k_3 > 0$ en $k_i = 0$ als $i \geq 6$.

Bepaal de minimale waarde voor k_3 en bepaal bij deze minimale waarde van k_3 de waarden van k_4 en k_5 .

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten