Kenmerk : TW2013/DWMP/030/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW**
Vakcode : 191521611
Datum : 8 november 2013
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. In deze opgave bekijken we rijtjes van twaalf cijfers, zoals 869945757310 en 001229321091.

(a) [1 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?

(b) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die bestaan uit drie nullen, vier enen en vijf tweeën?

(c) [3 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die alle cijfers bevatten, zoals 909857341026?

Bij de volgende onderdelen is de volgorde van de cijfers niet van belang (dus het rijtje 309834917603 is hetzelfde als 480039936713)

(d) [1 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?

(e) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die alle oneven cijfers bevatten en niet meer dan twee vieren hebben, zoals 904157341221?

2. (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic".

$$((p \to q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))) \Longleftrightarrow \neg(p \vee q)$$

(b) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\begin{array}{l} \forall x\ [p(x) \vee q(x)] \\ \forall x\ [(\neg p(x) \wedge q(x)) \to r(x)] \\ \hline \therefore \forall x\ [\neg r(x) \to p(x)] \end{array}$$

z.o.z

3. (a) [2 pt] Voor $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, zijn de intervallen $A_k \subseteq \mathbb{R}$ gegeven door: $A_k = [-\frac{1}{k}, 2k)$.

Bepaal $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ en $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

(b) [2 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende statement over verzamelingen A, B en C in een universum $\mathcal{U}$:

$$(A \cup B) - C = (A - B) \cup (B - C).$$

4. [4 pt]
Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \geq 1$ geldt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

5. Laat $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De relatie R op A is gegeven door:

$$(x, y) \in R \iff x^2 - y^2 \text{ is deelbaar door 3.}$$

(a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op A.

(b) [2 pt] Bepaal de partitie van A die door R wordt geïnduceerd.

6. [3 pt]
Gegeven is een zelf-complementaire graaf $G = (V, E)$, d.w.z.: G is isomorf met $\overline{G}$.
Toon aan dat: $|V| = 4k$ of $|V| = 4k + 1$, voor zekere $k \in \mathbb{N}$.

7. Gegeven is een boom $T = (V, E)$, met $|V| = n$.

(a) [2 pt] Bepaal het aantal lijnen van het complement $\overline{T}$.

(b) [2 pt] Toon aan dat $\kappa(\overline{T}) \leq 2$, d.w.z. dat $\overline{T}$ hoogstens twee componenten heeft.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

Laws of Logic

L1.	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Law of Double Negation
L2.	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	DeMorgan's Laws
L3.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutative Laws
L4.	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Associative Laws
L5.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive Laws
L6.	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotent Laws
L7.	$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$	Identity Laws
L8.	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$	Inverse Laws
L9.	$p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$	Domination Laws
L10.	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorption Laws
L11.	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
L12.	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
L13.	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	

Rules of Inference

R1.	$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$	Modus Ponens
R2.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	Law of the Syllogism
R3.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	Modus Tollens
R4.	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	Rule of Conjunction
R5.	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Rule of Disjunctive Syllogism
R6.	$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$	Rule of Contradiction
R7.	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	Rule of Conjunctive Simplification
R8.	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	Rule of Disjunctive Amplification
R9.	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \hline \therefore r \end{array}$	Rule of Conditional Proof
R10.	$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{array}$	Rule for Proof by Cases
R11.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore (q \vee s) \end{array}$	Rule of the Constructive Dilemma
R12.	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$	Rule of the Destructive Dilemma

Aanvullende wetten m.b.t. quantoren

N1 $[\forall x \quad x\ ]$ $\qquad \exists x \quad x$

N2 $[\exists x \quad x\ ]$ $\qquad \forall x \quad x$

Aanvullende afleidingsregels m.b.t. quantoren

U1 $\dfrac{\forall x \quad x}{\quad c}$ oor een willekeurige c in e uni ersu

U2 $\dfrac{\exists x \quad x}{\quad c}$ oor een zekere c in e uni ersu

U3 $\dfrac{c}{\forall x \quad x}$ oor een willekeurige c in e uni ersu

U4 $\dfrac{c}{\exists x \quad x}$ oor een zekere c in e uni ersu

U1: Rule of Uni ersal eci ca ion

U2: Rule of Exis en ial eci ca ion

U3: Rule of Uni ersal Generaliza ion

U4: Rule of Exis en ial Generaliza ion