Kenmerk : TW2012/DWMP/071/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW**
Vakcode : 191521611
Datum : 9 november 2012
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Beschouw de verzameling van alle rijtjes van 10 cijfers, waarbij uitsluitend de cijfers 0, 1, 2 en 3 voorkomen; bijvoorbeeld 0322122022, 1111111111 en 2221112211.

   (a) [3 pt] Voor hoeveel van deze rijtjes is de som van de 10 cijfers gelijk aan 5?

   (b) [3 pt] Bij hoeveel van deze rijtjes staan er geen twee of meer enen direct naast elkaar? Bijvoorbeeld: 3001012331 en 3200333220 mogen wel, maar 3200112123 en 1330011123 niet.

2. (a) [2 pt] Laat $n \in \mathbb{Z}^+$. Formuleer de Binomiaalstelling (*Binomial Theorem*) en bereken hiermee: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n+k}$.

   (b) [2 pt] Bepaal het aantal oplossingen van

$$10 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20,$$

   waarvoor $x_i \in \mathbb{N}$, $(1 \leq i \leq 5)$, en $x_1 \geq 4$. $(\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\})$

3. (a) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":

$$((p \to q) \to (q \to r)) \Longleftrightarrow (q \to r).$$

   (b) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic" en de "Rules of Inference".

$$\begin{array}{l} (p \to q) \to r \\ p \to (q \vee s) \\ \hline \therefore r \vee s \end{array}$$

   (c) [2 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende argument:

$$\begin{array}{c} \forall x\, [p(x) \to q(x)] \\ \forall x\, [p(x) \to r(x)] \\ \forall x\, [\neg q(x) \to r(x)] \\ \hline \therefore (\forall x\, \neg p(x)) \vee (\forall x\, q(x)) \vee (\forall x\, r(x)) \end{array}$$

z.o.z

4. (a) [1 pt] Voor $n \in \mathbb{Z}^+$ zijn de verzamelingen $A_n \subseteq \mathbb{R}$ gegeven door: $A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

   Bepaal $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ en $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

   (b) [3 pt] A, B en C zijn verzamelingen in een universum $\mathcal{U}$. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende bewering:

$$((A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)) \Longrightarrow A = B.$$

   (NB: een Venn-diagram geldt niet als bewijs)

5. [4 pt]
   Bewijs met het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \in \mathbb{Z}^+$ geldt:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

   Hierbij is: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} = \left(\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{2\cdot n-1}{2\cdot n}\right)$.

6. Gegeven zijn verzamelingen X en Y, zo dat $Y \subseteq X$.
   De relatie R op $\mathcal{P}(X)$ wordt gegeven door: $ARB \iff A \cup Y = B \cup Y$.

   (a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op $\mathcal{P}(X)$.

   (b) [2 pt] Neem $X = \{1,2,3,4\}$ en $Y = \{2,3\}$. Bepaal de partitie van $\mathcal{P}(X)$ die door R wordt geïnduceerd.

7. [3 pt]
   Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met $|V| \geq 3$.
   Verder is gegeven dat G samenhangend is, maar niet volledig (*not complete*).
   Toon aan dat er drie verschillende punten $u, v, w \in V$ bestaan zo dat
   $\{u,v\} \in E$, $\{v,w\} \in E$ en $\{u,w\} \notin E$.

8. [3 pt]
   Gegeven is een boom $T = (V, E)$, met $|V| \geq 2$.
   Toon aan dat het aantal punten van graad 1 in T gelijk is aan:

$$2 + \sum_{v \in V:\ \deg(v) \geq 3} (\deg(v) - 2).$$

   (Hierbij wordt dus gesommeerd over alle punten in V die graad minstens 3 hebben).

Totaal: 36 + 4 = 40 punten