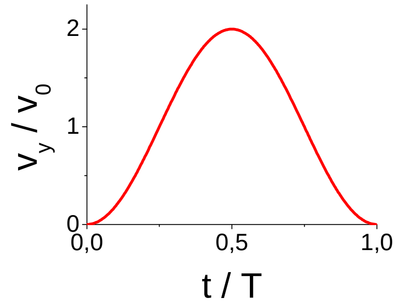
Opgave 1 (20 punten)

a) Een deeltje beweegt in het x-y vlak met een constante snelheid v_0 in de x-richting. De snelheid van het deeltje in de y-richting hangt af van de tijd zoals hiernaast geschetst

- Schets de baan van het deeltje y(x) in het x-y-vlak voor het tijdsinterval [0, T]. (kies de oorsprong zodanig dat y(t=0) = x(t=0) = 0.
- Schets de absolute waarde van de versnelling als functie van de tijd.



b) De positie van een deeltje is gegeven door:

$\vec{r}(t) = At \cdot cos(\omega t)\, \underline{e}_x + At \cdot sin(\omega t)\, \underline{e}_y$ met A een constante, en t de tijd.

- Schets de baan van het deeltje in het x-y vlak, en geef aan wat de posities zijn op de tijden t = 0, π/ω, 2π/ω, 3π/ω, 4π/ω.
- Vind de uitdrukkingen voor de snelheid en versnelling als functie van t.

c) Een treinwagon (lengte: 20 m) rijdt met een snelheid van 240 km/u. Een kogel wordt afgevuurd van het achtereind naar het voorste eind, waarbij de snelheid van de kogel ten opzichte van het pistool 1 km/s bedraagt.

- Over welke afstand vliegt de kogel tussen het moment van afvuren en het moment van inslag, gemeten in het assenstelsel van een stilstaande waarnemer?

Uitwerking 1

a) Gegeven de snelheid in x-richting $v_x = v_0$ dus

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \int_0^t v_y(t')dt'$$

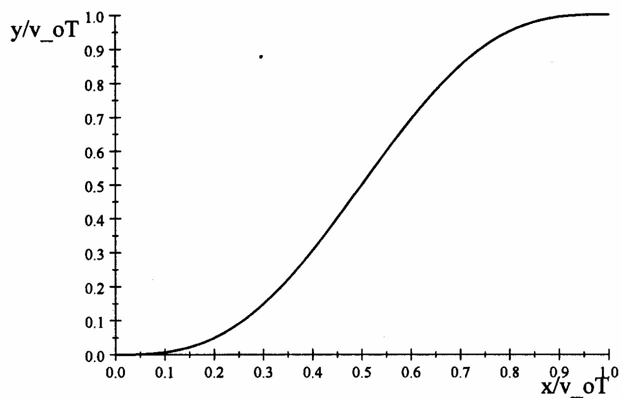
$$\simeq v_0 T \int_0^{t/T} (1 - cos(2\pi z))dz$$

$$= v_0 T \int_0^{t/T} dz - v_0 T \int_0^{t/T} cos(2\pi z)dz$$

$$= v_0 t - \frac{v_0 T}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Ofwel

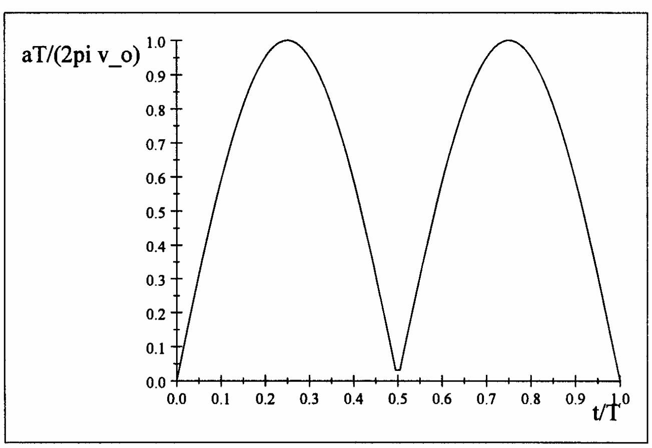
$$y = x - \frac{v_0 T}{2n} sin\left(\frac{2\pi}{v_0 T} x\right)$$



en de versnelling

$$|a| = \left| a_y = \frac{d}{dt} v_0 \left(1 - cos(2\pi t / T)\right) \right|$$
$$= \frac{2\pi v_0}{T} \left| sin(2\pi t / T) \right|$$

in grafiek



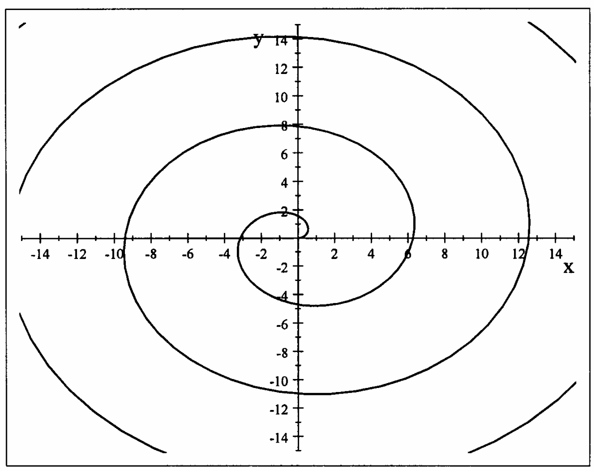
b) $\underline{r}(t) = At\, cos\, \omega t \underline{e}_x + At\, sin\, \omega t \underline{e}_y$

met $\omega t = \theta$ kunnen we dit schrijven als

$$r(\theta) = \frac{A\theta}{\omega}$$

t	θ	$r(\theta)$
0	0	0
π / ω	π	$A\pi$
$2\pi / \omega$	2π	$2A\pi$
$3\pi / \omega$	3π	$3A\pi$
…	…	…

wat een spiraal geeft.



Voor de plaats is gegeven

$$\underline{r}(t) = At\cos\omega t\underline{e}_x + At\sin\omega t\underline{e}_y$$

differentiëren geeft

$$\underline{v}(t) = (A\cos\omega t - \omega At\sin\omega t)\underline{e}_x + (A\sin\omega t + \omega At\cos\omega t)\underline{e}_y$$

en nogmaals differentiëren

$$\underline{a}(t) = (-2\omega A\sin\omega t - w^2 At\cos\omega t)\underline{e}_x + (2\omega A\cos\omega t - \omega^2 At\sin\omega t)\underline{e}_y$$

b) De lengte van de trein is 20 m. de snelheid van de kogel tov de wagon is 1000 m/s. De kogel is dus 20/1000 s = 0.02 s onderweg. Ten opzichte van de stilstaande waarnemer is de kogel snelheid: 1*km/s*+240*km/u*=1000+2400/36= 1067*m/s*. De afstand wordt dan *L*=*vt*=1067x0.02=21.34 m

Opgave 2 (15 punten)

Een onbemand militair vliegtuig met massa *M* vliegt met snelheid *V* op hoogte *H*. Op een gegeven moment ontploft een bom aan boord, waardoor het vliegtuig in twee stukken met massa's ¼*M* en ¾*M* breekt. Het opbreken vindt uitsluitend in horizontale richting plaats. Direct na de botsing blijkt het lichtste fragment verticaal naar beneden te bewegen.

- Welke afstand legt het zwaarste fragment af tussen de explosie en het neerkomen op de grond, uitgedrukt in g en de gegeven grootheden?
- Hoeveel energie moet er minimaal zijn vrijgekomen bij de explosie, uitgedrukt in de gegeven grootheden?

(wrijving en energie dissipatie mogen worden verwaarloosd voor de berekening

Uitwerking 2

a. De impuls in horizontale richting moet behouden blijven:

$$MV = \tfrac{1}{4}Mu_{1x} + \tfrac{3}{4}Mu_{2x} = \tfrac{3}{4}Mu_{2x}$$

hieruit volgt dat $u_{2x} = \tfrac{4}{3}V$. De valtijd wordt gegeven door:

$$H = \tfrac{1}{2}gt_v^2$$

$$t_v = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

en

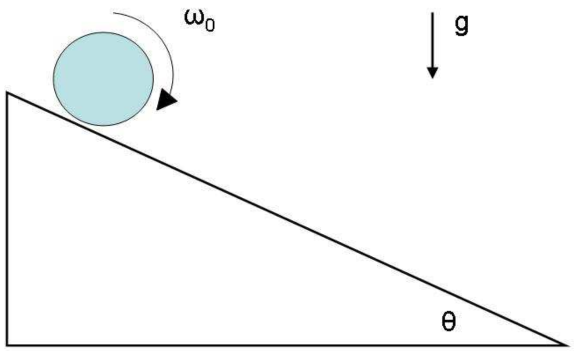
$$\Delta x = u_{2x}t_v = \tfrac{4}{3}V\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

is de afstand die het grootste fragment, in horizontale richting, aflegt.

b. De hoeveelheid energie die vrijgekomen is door de explosie, wordt gegeven door de toename van de totale kinetische energie:

$$\begin{aligned} T_{voor} &= \tfrac{1}{2}MV^2 \\ T_{na} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}M\left(\tfrac{4}{3}V\right)^2 \\ &= \tfrac{2}{3}MV^2 \\ \Delta T &= \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}\right)MV^2 = \tfrac{1}{6}MV^2 \end{aligned}$$

Opgave 3 (norm: 20 punten)



Gegeven zij een cilinder met massa m, straal R, en massatraagheidsmoment (t.o.v. het massacentrum) I. De cilinder wordt (kloksgewijs) aan het draaien gebracht, en met hoeksnelheid ω_0 neergelegd op een helling, die een hoek θ met de horizontaal maakt, en een zeer ruw oppervlak heeft. De statische en dynamische wrijvingscoëfficiënten bedragen μ_s respectievelijk μ_k. Nadat de draaiende cilinder is neergelegd zal deze aanvankelijk slippend naar beneden gaan. De zwaartekrachtsversnelling is g.

Van u wordt gevraagd de volgende relevante gegevens bij deze slippende beweging te verstrekken:

a) werk de translatie bewegingsvergelijking $F = ma$ uit tot een uitdrukking waarin naast a alleen de gegeven grootheden voorkomen.

b) werk de rotatie bewegingsvergelijking $\tau = I\,\alpha$ uit tot een uitdrukking waarin alleen de gegeven grootheden voorkomen.

c) Geef de uitdrukkingen voor de translatiesnelheid v en de hoeksnelheid ω als functie van de tijd na het plaatsen van de cilinder op de helling.

d) Teken in één grafiek zowel de grootheden v als ωR uit tegen de tijd. Als blijkt dat de curven elkaar snijden, geef dan aan wat de fysische betekenis hiervan is.

Uitwerking 3

a) de wrijvingskracht werkt aanvankelijk in dezelfde richting als de zwaartekracht component.

$$F = ma = mg\,sin\,\theta + \mu_k mg\,cos\,\theta \quad \text{(langs de helling)}$$

b) rotatie om massacentrum v/d cilinder:

$$\tau = I\alpha = \mu_k mgR \;\; cos \;\; \theta$$

c) $a = g(sin\,\theta + \mu_k \; cos\,\theta\,)$ = constant $\Rightarrow$ $v = g(sin\,\theta + \mu_k \; cos\,\theta\,)t$

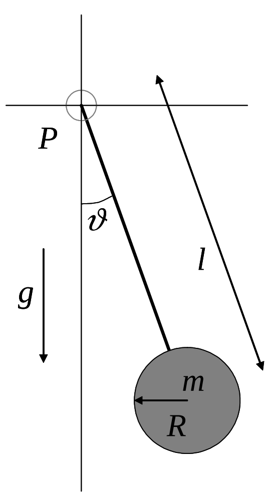
$$\alpha = \frac{\mu_k mgR}{I} cos\,\theta \;\text{= constant} \;\Rightarrow\; \omega = \omega_0 - cos\,\theta \left(\frac{\mu_k mgR}{I} \right) t$$

d) ωR neemt af met de tijd, v neemt toe met de tijd. Bij voldoende lange helling wordt een snijpunt bereikt. De cilinder gaat dan zuiver rollen.

NB uitdrukking voor deze tijd: $t^* = \dfrac{\omega_0 R}{g} \dfrac{1}{\mu_k \; cos\,\theta(\dfrac{mR^2}{I} + 1) + sin\,\theta}$

Opgave 4 (15 punten)

Een slingeruurwerk heeft voor zijn aandrijving naast een gewicht een slinger nodig, met een slinger periode van T = 2 seconden. Hiertoe is een messing schijf met straal R aan een starre massaloze staaf met lengte l bevestigd, zie de gegeven figuur.
(Het massatraagheidsmoment van een schijf t.o.v. diens massacentrum bedraagt ½ mR^2 en de zwaartekrachtversnelling g = 9.81 m/s^2.)



a) Geef een uitdrukking voor de periode T uitgedrukt in de gegeven grootheden.

b) Bepaal de lengte l als gegeven is dat R = 10 cm.

c) De klokkenmaker kan de slinger met een nauwkeurigheid van Δl = 0.1 mm maken. Wat is de maximale afwijking van de klok uitgedrukt in seconden per dag?

Uitwerking 4

a. De bewegings vgl van de slinger is gegeven door:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mgl}{ml^2 + \frac{1}{2}mR^2}\vartheta = 0$$

Dus de periode T is gegeven door:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l^2 + R^2}{2gl}}$$

b. Als T gegeven is dan vinden we de lengte met:

$$2l^2 - 2gl\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 + R^2 = 0$$

Oplossen van deze vgl geeft:

$$\begin{aligned} l &= \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^4 - \frac{1}{2}R^2} \\ &= \frac{9.81}{2}\left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{9.81}{2}\right)^2\left(\frac{2}{2\pi}\right)^4 - \frac{1}{2}(0.1)^2} \\ &= 0.497 \pm 0.492\,m \end{aligned}$$

Er zijn twee oplossingen mogelijk maar in dit geval moet gelden $l > R$. dus:
l = 0.989 m

c. Zoals boven gegeven:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l^2 + R^2}{2gl}}$$

dus

$$dT = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2l^2 + R^2}{2gl}}}\left(\frac{1}{g} - \frac{R^2}{2gl^2}\right)dl$$

$$dT = \frac{\pi^2}{gT}\left(2 - \frac{R^2}{l^2}\right)dl$$

$$= \frac{\pi^2}{9.81 * 2}\left(2 - \left(\frac{0.1}{0.989}\right)^2\right)10^{-4}$$

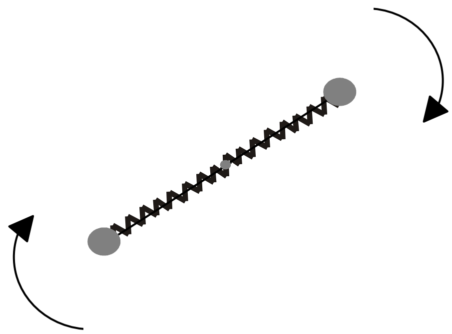
$$= 10^{-4}\,s$$

Dus $\Delta T / T$ = 0.5 x 10.4^{-4}. Er gaan 60*60*24 = 8.64 x 10^4 seconden in een dag, dus

$$\Delta T = 4.32s$$

Opgave 5 (15 punten)

Zoals ook hieronder aangegeven, wordt een Dynamica experiment uitgevoerd met een systeem bestaande uit twee puntmassa's *m* aan de uiteinden van een halter. De puntmassa's zijn aanvankelijk via twee ijsstokjes, elk met lengte L_0 verbonden met het massacentrum van het systeem. Ook zijn er elastische veren gespannen tussen het midden en de puntmassa's. De rustlengte van deze veren is L_0.
Aanvankelijk wordt het systeem wordt op een gladde tafel gelegd, en tot roteren gebracht; de hoeksnelheid bedraagt dan ω_0. Als vervolgens in een flits de ijsstokjes worden verdampt (d.w.z. zo snel dat de veren en puntmassa's nog niet hebben kunnen reageren), gaat het systeem een andere beweging uitvoeren.
Voor de gevraagde berekeningen mag worden aangenomen dat de massa's van de ijsstokjes en veren verwaarloosbaar zijn.



a) Welke behoudswetten moeten in ieder geval gebruikt worden om de beschrijving van de nieuwe beweging te vinden? (Geef ook een korte motivatie)

b) Beschrijf kwalitatief hoe de nieuwe beweging eruit gaat zien.

c) Leid af dat:

$$m\omega_0^2 L_0^2 = m\omega_0^2 \frac{L_0^4}{L^2} + k(L - L_0)^2 + m\left(\frac{dL}{dt}\right)^2$$ met L de momentane lengte van de veren.

d) Laat zien dat alle termen dezelfde dimensie hebben.

Uitwerking 5

a) behoud van de mechanische energie E = U +K, en van impulsmoment L (ten opzichte van massacentrum)

b) Als gevolg van de rotatie worden de veren uitgerekt. De halter blijft roteren, maar daarbij komt nog een trilling: de afstand tussen de massa's aan de uiteinden fluctueert.

c) aanvankelijk is er alleen de kinetische energie van rotatie (linkerlid). In de nieuwe situatie is de rotatie energie verlaagd. Er is een potentiële veerenergie bijgekomen. Ook is er nu kinetische energie van translatie (de trilling).

ω_1 is geëlimineerd door behoud van impulsmoment in te vullen.

d) alle termen hebben dimensie massa.(lengte/tijd)^2

Opgave 6 (15 punten)

Een koord met massa M en lengte L is ingeklemd in x = 0 (d.w.z. $y(0, t) = 0$). Het punt in $x = L$ wordt zodanig bewogen dat: $y(L, t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ waarbij $\varepsilon \ll L$. De spankracht F in het koord is constant. Ten gevolge hiervan ontstaat er een staande golf op het koord gegeven door:

$y(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t)$

a) druk het golfgetal k en de golflengte λ uit in ω en de gegeven grootheden: F, M en L.

b) Bepaal de waarde van φ uit de randvoorwaarde voor $x = 0$.

c) Bepaal de amplitude A van de staande golf als functie van λ, uitgedrukt in de gegeven grootheden, door gebruik te maken van de randvoorwaarde voor $x = L$.

d) Schets $y(x, 0)$ voor het geval $L = 11/12\ \lambda$.

Uitwerking 6

c) Voor een lopende golf zou de fasesnelheid $v = \omega / k$ gegeven zijn door:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{M}}$$ dus

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\frac{M}{FL}}$$ en

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{FL}{M}}$$

b. $y(0,t) = 0$ dus

$$A \sin(\phi) \cos \omega t = 0$$

Waaruit volgt dat $\phi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$

c. In $x=L$ geldt:

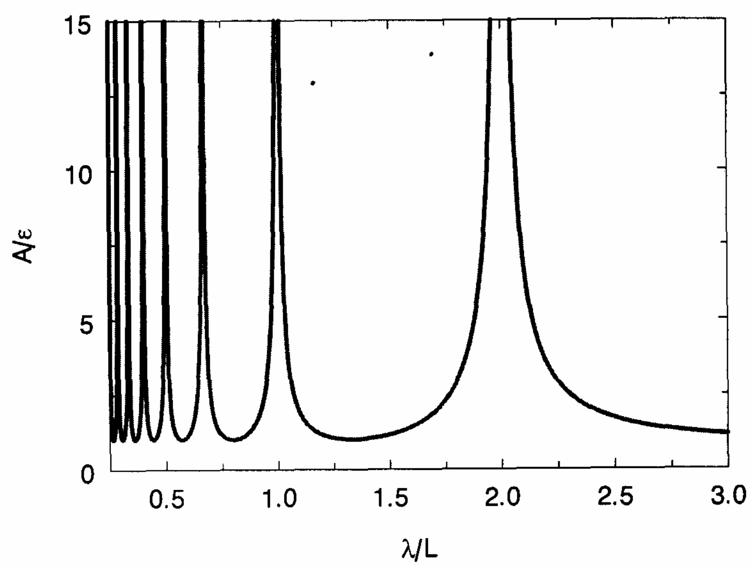
$$y(L,t) = \varepsilon \cos \omega t = A \sin(kL) \cos \omega t$$

Hieruit volgt:

$$A(\lambda)=\left|\frac{\varepsilon}{sin(kL)}\right|=\left|\frac{\varepsilon}{sin(2\pi L/\lambda)}\right|$$

N.B. Als sin(*kL)*<0 dan moet een faseverschil π toegevoegd worden in de uitdrukking voor *y(x,t):*

$$y(x,t)=A\,sin(kx)cos\,\omega t=-A\,sin(kx+\pi)cos\,\omega t$$



d. De uitwijking *y* wordt dus gegeven door:

$$y(x,t)=\varepsilon\frac{sin(kx)}{sin(kL)}cos\,\omega t$$

Voor $L=\frac{11}{12}\lambda$ en *t*=0 wordt dit:

$$y(x,0) = \varepsilon \frac{\sin(kx)}{\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)} = -2\varepsilon \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

In grafiek: