
Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen (vakcode 156012) en
Differentiaalvergelijkingen voor TN (vakcode 156013)

20 juni 2005, 9.00-12.00.

Voor Gewone Differentiaalvergelijkingen maak opgaven 1, 2, 3, 4, 5.
Voor Differentiaalvergelijkingen voor TN maak opgaven 1, 2, 3, 4, 6.

1. (a) (3 pt) Bepaal de exacte oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y' = -2t/y, \quad y(0) = 2.$$

- (b) (2 pt) Wat is het existentieinterval van deze oplossing?

2. In deze opgave wordt de matrix A gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (4 pt) Bepaal de algemene oplossing in reële vorm van het stelsel

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

- (b) (3 pt) Bepaal e^{At} .

3. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x(2-x) \\ y' &= -2y. \end{aligned} \tag{1}$$

- (a) (3 pt) Bepaal de nullclines en de evenwichtspunten van het stelsel en schets deze in het fasevlak. Geef de richting aan van het vector veld op de nullclines.
(b) (4 pt) Geef voor elk evenwichtspunt de linearisatie van het stelsel (1) en bepaal het type van het evenwichtspunt. Schets voor elk evenwichtspunt een faseplaatje van het gelineariseerde stelsel.
(c) (2 pt) Schets een faseplaatje van het oorspronkelijke stelsel in vergelijking (1).

4. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= x - y - x(3x^2 + y^2) \\ y' &= x + y - y(2x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Gegeven is dat dit stelsel precies één evenwichtspunt heeft, nl. het punt $(0, 0)$.

- (a) (4 pt) Laat zien dat het ringvormige gebied $1/3 < r < 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ positief invariant is.
(b) (2 pt) Welk type limietgedrag voor $t \rightarrow \infty$ heeft een oplossing met beginpunt in het bovenstaande gebied?

5. Alleen voor Gewone Differentiaalvergelijkingen (156012)

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}x' &= y - xy^2 - 3x^3 \\ y' &= -2x - x^2y - 2y^3\end{aligned}$$

- (a) (3 pt) De oorsprong is een geïsoleerd evenwicht. Waarom kun je met behulp van linearisatie de stabiliteit ervan niet bepalen?
- (b) (3 pt) Voor welke waarden van a en b geldt voor de functie $V(x, y) = ax^2 + by^2$ dat \dot{V} negatief definitief is in de buurt van de oorsprong?
- (c) (3 pt) Wat kun je zeggen over de stabiliteit van het evenwicht? Beargumenteer het antwoord.

6. Alleen voor Differentiaalvergelijkingen voor TN (156013)

Beschouw de Laplace vergelijking

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \tag{2}$$

op het vierkant gegeven door $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Bekijk de vergelijking met de volgende randvoorwaarden

$$u(0, y) = u_x(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 1) = h(x), \tag{3}$$

d.w.z. aan één zijde een Neumann randvoorwaarde, en aan de overige zijden Dirichlet randvoorwaarden. Substitutie van $u(x, y) = X(x)Y(y)$ en toepassing van scheiding van variabelen leidt tot de volgende differentiaalvergelijking voor $X(x)$:

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{4}$$

- (a) (3 pt) Geef een afleiding van (4). Geef ook de differentiaalvergelijking voor $Y(y)$.
- (b) (2 pt) Wat zijn de randvoorwaarden voor $X(x)$? Bepaal de oplossingen (d.w.z. eigenwaarden en eigenfuncties) van dit Sturm-Liouville probleem voor X .
- (c) (4 pt) Wat zijn de oplossingen van de vergelijking voor $Y(y)$? Bepaal vervolgens de oplossing van vergelijkingen (2), (3) voor $f(x) = 0$ en $h(x) = 2 \sin(\frac{3\pi}{2}x)$.

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.